

# Transformationscodierung

Rüdiger Knörig

19. März 2001

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation zur Transformationscodierung</b>	<b>3</b>
1.1	Redundanz und Irrelevanz . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Beurteilung diskreter Transformationen</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Die Karlhunen-Loeve-Transformation</b>	<b>6</b>
3.1	Anforderungen an eine optimale Transformation . . . . .	6
3.2	Herleitung der Transformationsgleichung . . . . .	6
3.2.1	alternative Herleitung . . . . .	8
3.3	Eigenschaften der Transformationsmatrix . . . . .	10
3.4	Aufwandschätzung für die KLT . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Die diskrete Kosinustransformation</b>	<b>12</b>
4.1	Ableitung der DCT von der Fouriertransformation . . . . .	12
4.2	die diskrete Form . . . . .	13

# 1 Motivation zur Transformationscodierung

Die Funktion vieler Dinge, die nicht notwendigerweise technischer Natur sein müssen, erschließt sich oftmals erst nach der Klärung der Frage nach dem „Warum?“ bzw. nach der Zielsetzung bestimmter Verfahren. Gerade das Beispiel der Karhunen-Loeve-Transformation<sup>1</sup> zeigt, daß sich die Lösung vieler Probleme aus der Erkenntnis des eigentlichen Kernproblems ergibt, wenn man daraus eine möglichst präzise formulierte Zielvorgabe zur Lösung desselben entwickelt. Um die Transformationscodierung zu verstehen, ist es ratsam, die Eingangsdaten, deren Eigenschaften ja durch die Transformation in gewünschter Weise geändert werden sollen, zu betrachten. Um die Betrachtungen nicht unnötig zu verkomplizieren, soll unter diesen eine eindimensionale zeit- und amplitudendiskrete Wertfolge  $\tilde{x}_n$  verstanden werden, unter einem Datensatz oder Datenvektor  $\vec{X}$  die Zusammenfassung von  $N$  aufeinanderfolgenden Abtastwerten (s. Abbildung 1). Das

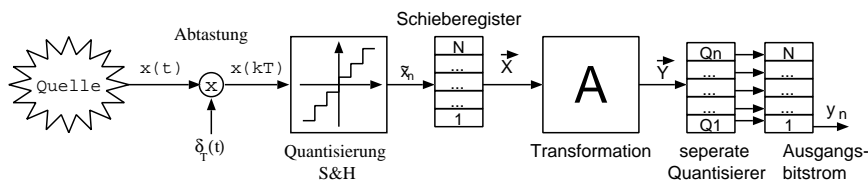


Abbildung 1: Blockschaltbild eines Transformationscodierers

Eingangssignal  $x(t)$  läßt sich für die in der Praxis vorkommenden Quellen in den seltensten Fällen mit den Methoden der klassischen Nachrichtentheorie beschreiben, da diese nur deterministische Signale behandelt. Für diese ist aber eine Informationsübertragung redundant, da der Empfänger dieses Signal selbst und unabhängig von der Quelle herleiten kann. Allerdings sind praxisrelevante Eingangssignale auch nicht völlig frei von derartiger Redundanz, worauf die hier nicht näher beschriebene Prädiktionscodierung (siehe [1],[3],[4]) aufbaut. Zur Beschreibung des Eingangssignals, welches aus praktischen Gründen ab hier durch die Folge  $\tilde{x}_n$  repräsentiert werden soll, ist diese als Realisierung eines zeit- und wertdiskreten Zufallsprozesses zu sehen. Anlehnend an Abbildung 1 läßt sich das folgendermaßen verstehen: zu jedem Abtastzeitpunkt  $kT$  liefert der Quantisierer einen Index aus der Menge aller möglichen Quantisiererstufen  $\Omega$ ,  $|\Omega| = M$ , der dem anliegenden Abtastwert  $x(kT)$  entspricht. Dies läßt sich als Realisierung einer Zufallsvariablen ansehen, die zeitliche Abfolge als Zufallsprozeß. Dabei ist die Menge der Quantisiererstufen gleich der Ergebnismenge  $\Omega$  des Zufallsprozesses.

<sup>1</sup>im Folgenden mit *KLT* abgekürzt

## 1.1 Redundanz und Irrelevanz

Ein entscheidendes Kriterium für die weitere Verwendung der Quelldaten ist ihr Speicherplatzbedarf – weisen doch Übertragungs- oder Speichermedien bekanntermaßen nur eine begrenzte Kapazität auf. Würde man die nichttransformierten Datensätze  $\vec{X}$  übertragen bzw. speichern wollen, so würde man

$$m = N \cdot \log_2 M \quad (1)$$

Bits je Datensatz benötigen. Bei 256 Abtastintervallen und 8 Abtastwerten je Datensatz würde man somit auf 64 Bit je Datensatz kommen. Nun ist es aber auch leicht einzusehen, daß diese Speichermenge nicht in jedem Fall notwendig ist, um die Information des Signals zu übertragen; man stelle sich z.B. ein einwertiges PCM-Signal als Eingangssignal vor: hier würde ein Bit je Abtastwert vollkommen ausreichen. Mit der durch C. Shannon in [7] definierten *Entropie* läßt sich die für die Übertragung der Information minimal nötigen Bitmenge angeben:

$$H(\tilde{x}_n) = - \sum_{\eta \in \Omega} P(\tilde{x}_n = \eta) \cdot \log_2 P(\tilde{x}_n = \eta) \quad (2)$$

Für das o.g. PCM-Signal würde die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion z.B.  $0.5 \cdot (\delta(x - X(U_{Low})) + \delta(x - X(U_{High})))$  (wertdiskret zu sehen) lauten; für die Entropie würde sich hier  $-(0.5 \cdot \log_2(0.5) + 0.5 \cdot \log_2(0.5)) = -(-1)$  ergeben. Somit kann die *Redundanz* als Differenz zwischen dem Speicherplatzbedarf eines Signals gemäß Gleichung 1 und seiner Entropie definiert werden. Redundanz findet man in den Realisierungen von Prozessen, wenn die Zufallsvariablen zumindest zum Teil die gleichen Informationen beschreiben. Dies ist der Fall, wenn diese korreliert sind; je stärker die Korrelation, um so größer ist der Anteil an redundanten Informationen. Somit ist eine Redundanzreduktion durch eine Dekorrelation der Eingangsdaten zu erreichen.

Neben der Verringerung der Redundanz ist auch die Reduktion der *Irrelevanz* eine Möglichkeit, die zu übertragene Datenmenge zu reduzieren. Der Begriff der Irrelevanz leitet sich aus der Erkenntnis ab, daß zur Reproduktion eines Prozesses mit perfekter oder vorher festgelegter Qualität keine beliebig genaue Abspeicherung der Charakteristika notwendig ist. So besagt z.B. das Abtasttheorem [2], daß zur perfekten Rekonstruktion eines Signals die Abtastfrequenz das Doppelte der Signalbandbreite nicht unterschreiten darf. Andere Arten von Irrelevanz ergeben sich aus den Anforderungen der Senke; so beruht der große Erfolg der Audiodatenkomprimierung<sup>2</sup> zum großen Teil auf dem Wissen über das, was die Senke (in diesem Fall das menschliche Gehör) nicht wahrnimmt - und diese Informationen müssen dann auch nicht übertragen werden. Auch für die Entfernung von Irrelevanzen ist eine Dekorrelation der Eingangsdaten nützlich; wie sich mit den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigen läßt, gilt für Prozesse mit

---

<sup>2</sup>Audio-Layer 3 des MPEG-2 Standards

dekorrelierten Zufallsvariablen, daß die Entropie des Prozesses sich aus der Summe der Entropien der Zufallsvariablen ergibt - damit kann die Quantisierung für jede Zufallsvariable (oder für jede Komponente des Datensatzes, siehe Abbildung 1) getrennt durchgeführt werden, ohne daß Abhängigkeiten berücksichtigt werden müssen.

## 2 Beurteilung diskreter Transformationen

Im letzten Abschnitt wurden einige allgemeine Überlegungen angestellt, aus denen die Anforderungen an eine Transformation abgeleitet worden sind. Für diese Anforderungen sollen nun konkrete Bewertungsmaße eingeführt werden, welche eine objektive Bewertung des Erfolges einer Transformationscodierung ermöglichen. Die entsprechenden Gleichungen sind aus [5] entnommen, so daß dort bei Unklarheiten nachgelesen werden kann. Wie aus dem vorhergehenden Abschnitt bekannt, sind zwei Eigenschaften der Transformation besonders wichtig: zum einen die Dekorrelation der Eingangsvektoren, was gleichbedeutend mit einer Redundanzreduktion ist, und die Energiepackungseffizienz. Diese gibt (für mittelwertfreie Signale) den Anteil der Signalenergien in den ersten  $M$  Transformationskoeffizienten an - je größer dieser ist, um so größer ist auch die Anzahl der Koeffizienten  $N - M$ , welche als irrelevant weggelassen werden können. Definiert man die Kovarianzmatrizen<sup>3</sup>  $\mathbf{U} = Cov(\vec{X})$  und  $\mathbf{V} = Cov(\vec{Y})$  gemäß

$$u_{kl} = u_{lk} = E[(x_k - \bar{x}_k)(x_l - \bar{x}_l)] \quad (3)$$

$$v_{kl} = v_{lk} = E[(y_k - \bar{y}_k)(y_l - \bar{y}_l)], \quad (4)$$

wobei  $x_k$  eine Komponente der Eingangsvektors  $\vec{X}$  (s. Abbildung 1) ist und  $y_k$  eine Komponente des Transformationskoeffizientenvektors  $\vec{Y}$  ist. Die *Dekorrelationseffizienz*  $\eta_c$  berechnet sich gemäß Gleichung 5 zu

$$\eta_c = 1 - \frac{\sum_{k \neq l} |v_{kl}|}{\sum_{k \neq l} |u_{kl}|} \quad (5)$$

Zur Erklärung sei hier nur gesagt, daß die Kovarianzmatrix eines völlig dekorrelierten Eingangsvektors eine Diagonalmatrix ist - entscheidend ist also das Verhältnis der Summen der Absolutwerte aller Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen vor -und nach der Transformation. Die Elemente der Hauptdiagonalen sind die Varianzen  $\sigma_k^2$  der jeweiligen Koeffizienten, da für  $k = l$

$$E[(x_k - \bar{x}_k)(x_l - \bar{x}_l)] = E[(x_k - \bar{x}_k)^2] = \sigma_k^2 \quad (6)$$

---

<sup>3</sup>dieser Begriff wird im nächsten Abschnitt oder in [1] näher erklärt

gilt. Mit  $E = \sigma^2 + \mu^2$  ist die Varianz für mittelwertfreie Signale gleich der Energie der Signale. Somit ergibt sich die *Energiepackungsdichte*  $\eta_E$  zu

$$\eta_E = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} v_{kk}}{\sum_{k=0}^{N-1} v_{kk}} \quad (7)$$

, wenn von den N möglichen Koeffizienten nur die M ersten verwendet werden.

### 3 Die Karlhunen-Loeve-Transformation

#### 3.1 Anforderungen an eine optimale Transformation

Die eigentliche Transformation des Datenvektors  $\vec{X}$  in einen Datenvektor  $\vec{Y}$  und zurück<sup>4</sup> kann durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$$\vec{Y} = A \cdot \vec{X} \quad (8)$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{Y} \quad (9)$$

An die Transformationsmatrix A sind folgende Anforderungen zu stellen:

1. Durch die Transformation soll sich nichts am Informationsgehalt oder an der enthaltenen Information ändern → die Entropie muß erhalten bleiben.
2. Die Transformation muß reversibel sein, um aus den übertragenen Information das Quellensignal zurückzugewinnen →  $A^{-1}$  muß existieren.
3. Die Transformationskoeffizienten sollen eine hohe Energiepackungsdichte aufweisen, um eine Irrelevanzreduktion zu erleichtern.
4. Die Transformationskoeffizienten  $Y_n$  sollen dekorreliert sein - die Gründe dafür wurden im vorherigen Abschnitt genannt.

Im Folgenden soll aus der letzten Forderung die Transformationsgleichung der KLT abgeleitet werden; anhand des Ergebnisses soll dann die Erfüllung der ersten beiden Punkte bewiesen werden.

#### 3.2 Herleitung der Transformationsgleichung

Die Forderung nach völliger Dekorrelation der Transformationskoeffizienten  $Y_i$  ist dann erfüllt, wenn deren Kovarianzmatrix eine Diagonalmatrix ist:

$$Cov(Y_i, Y_j) = \sigma_i \sigma_j \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ 1 & : i = j \end{cases} \quad (10)$$

---

<sup>4</sup>auch die Rücktransformation muß für eine praxisrelevante Transformation existieren!

$Y_i$  und  $Y_j$  können als Zustände der entsprechenden „Fächer“ des Schieberegisters hinter dem Transformator in Abbildung 1 verstanden werden - mit jedem neu eingelaufenen Datensatz ändern sie ihre Belegung. Somit kann  $Y_i$  auch als Wertefolge betrachtet werden, der auch eine Standardabweichung  $\sigma_i$  zugeordnet werden kann. Aus der Definition der Kovarianzmatrix folgt

$$Cov(Y_i, Y_j) = E((Y_i - \bar{Y}_i)(Y_j - \bar{Y}_j)) \quad (11)$$

$$= E(Y_i Y_j - Y_i \bar{Y}_j - \bar{Y}_i Y_j + \bar{Y}_i \bar{Y}_j) \quad (12)$$

$$= E(Y_i Y_j) - \underbrace{E(Y_i)}_{\bar{Y}_i} \bar{Y}_j - \bar{Y}_i \underbrace{E(Y_j)}_{\bar{Y}_j} + \underbrace{E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j)}_{\bar{Y}_i \bar{Y}_j} \quad (13)$$

$$= E(Y_i Y_j) - \bar{Y}_i \bar{Y}_j \quad (14)$$

Mit  $\vec{Y} = A \cdot \vec{X}$  ist  $Y_i = \langle \vec{a}_i \cdot \vec{X} \rangle$  (aufgeschlüsselte Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix!) bzw  $Y_i = \sum_{k=1}^N a_{ik} \cdot x_k$ . Setzt man diesen Ausdruck für  $Y_i$  in Gleichung 14 ein, so erhält man

$$Cov(Y_i, Y_j) = E\left(\sum_{k=1}^N a_{ik} \cdot x_k \cdot \sum_{l=1}^N a_{jl} \cdot x_l\right) - \sum_{m=1}^N a_{im} \cdot \bar{x}_m \cdot \sum_{n=1}^N a_{jn} \cdot \bar{x}_n \quad (15)$$

$$= E\left(\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_{ik} \cdot x_k \cdot a_{jl} \cdot x_l\right) - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_{im} \cdot \bar{x}_m \cdot a_{jn} \cdot \bar{x}_n \quad (16)$$

Da  $\mathbf{E}$  ein linearer Operator ist, gilt auch

$$Cov(Y_i, Y_j) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_{ik} a_{jl} [E(x_k \cdot x_l) - \bar{x}_k \cdot \bar{x}_l] \quad (17)$$

Vergleicht man das Umfeld der Erwartungsfunktion mit dem in Gleichung 14 stehenden Ausdruck für die Kovarianz, ist auch der folgende Schritt leicht zu verstehen:

$$Cov(Y_i, Y_j) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_{ik} a_{jl} Cov(x_k, x_l) \quad (18)$$

$$Cov(Y_i, Y_j) = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{l=1}^N a_{jl} Cov(x_k, x_l) \right) a_{ik} \quad (19)$$

$$Cov(Y_i, Y_j) \stackrel{!}{=} \sigma_i \sigma_j \delta_{ij} \quad (20)$$

$$\sigma_i \sigma_j \delta_{ij} = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{l=1}^N a_{jl} Cov(x_k, x_l) \right) a_{ik} \quad (21)$$

$$\sigma_i \sigma_j \delta_{ij} = (Cov(x_k, x_l) \vec{a}_j) \vec{a}_i \quad (22)$$

Wie sich noch zeigen wird, sind  $\vec{a}_i$  und  $\vec{a}_j$  normiert, so daß eine Multiplikation beider Seiten mit  $\vec{a}_i$  wegen  $\langle \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i \rangle = 1$  zu folgender Gleichung führt:

$$\sigma_i \sigma_j \delta_{ij} \vec{a}_i = Cov(x_k, x_l) \vec{a}_j \quad (23)$$

Das im linken Term vorkommende Kroenecker-Symbol (s. Gleichung 10) reduziert die Betrachtung auf den Fall  $i = j$ .

$$\sigma_i^2 \vec{a}_i = Cov(x_k, x_l) \vec{a}_i \quad (24)$$

Diese Gleichung stellt ein typisches Eigenwertproblem der Form

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad (25)$$

dar. In unserem Beispiel sind die Vektoren  $\vec{a}_i$  die Eigenvektoren und die Varianzen  $\sigma_i^2$  die zugehörigen Eigenwerte. Somit ergeben sich die Zeilenvektoren  $\vec{a}_i$  der Karhunen-Loeve-Transformationsmatrix aus der Matrix der Kovarianzen der Eingangswerte. Da diese eine reellwertige, symmetrische  $(N \times N)$ -Matrix ist, besitzt sie auch  $N$  reelle Eigenwerte und  $N$  reelle, orthonormale Eigenvektoren (womit auch die beim Übergang zur Gleichung 23 aufgestellte Bedingung nach der Normierung der Zeilenvektoren  $\vec{a}_i$  erfüllt ist).

### 3.2.1 alternative Herleitung

Während die erste Herleitung auf der für die Redundanzreduktion wichtigen Forderung nach Dekorrelation aufbaut, soll hier eine auf die für die Irrelevanzreduktion wichtige Forderung, daß der Rekonstruktionsfehler bei der Verwendung von  $M < N$  Koeffizienten minimiert wird, aufbauende Herleitung gezeigt werden. Vorausgesetzt sei hier eine reellwertige, orthonormale Transformation  $\mathbf{A}$ . Bei der Rekonstruktion des Signals sollen die nicht verwendeten  $N - M$  Transformationskoeffizienten durch Konstanten  $k_i$  ersetzt werden, so daß sich als Ergebnisvektor für die *Rücktransformation*

$$\hat{x} = \sum_{i=0}^{M-1} y_i \cdot \vec{a}_i + \sum_{i=M}^{N-1} k_i \cdot \vec{a}_i \quad (26)$$

ergibt. Der entstehende Fehler  $\vec{x}_e$  berechnet sich zu

$$\vec{x}_e = \vec{x} - \hat{x} \quad (27)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cdot \vec{a}_i - \left( \sum_{i=0}^{M-1} y_i \cdot \vec{a}_i + \sum_{i=M}^{N-1} k_i \cdot \vec{a}_i \right) \quad (28)$$

$$= \sum_{i=M}^{N-1} (y_i - k_i) \cdot \vec{a}_i \quad (29)$$

Die mittlere Energie des Fehlers ist

$$e = E[|\vec{x}_e^2|] \quad (30)$$

Da die Basisvektoren  $\vec{a}_i$  orthonormal sind, gilt

$$\langle \vec{a}_k^T \cdot \vec{a}_l \rangle = \begin{cases} 1 & : k = l \\ 0 & : k \neq l \end{cases} \quad (31)$$



, womit sich die Fehlerenergie  $e$  zu

$$e = E\left[\sum_{i=M}^{N-1} (y_i - k_i)^2\right] \quad (32)$$

ergibt. Die Wahl der Konstanten  $k_i$  war optimal, wenn die Fehlerenergie ihr Minimum erreicht. Zur Berechnung dieser Konstanten muß die Ableitung der Fehlerenergie in Abhängigkeit von der jeweiligen Konstante  $\equiv 0$  gesetzt werden.

$$\frac{\partial e}{\partial k_i} = 0 \quad (33)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial k_i} E[(y_i - k_i)^2] \quad (34)$$

$$0 = E[-2(y_i - k_i)] = -2 \cdot (E(y_i) - k_i) \quad (35)$$

$$\implies k_i = E[y_i] = E[\vec{a}_i^T \cdot \vec{x}] \quad (36)$$

$$\implies k_i = \vec{a}_i^T \cdot E[\vec{x}] \quad (37)$$

Da  $E[\vec{x}]$  für mittelwertfreie Signale  $= \vec{0}$  ist, brauchen dann die durch Konstanten ersetzten Transformationskoeffizienten überhaupt nicht mehr betrachtet zu werden. Es ist also ratsam, vor der Transformation den Gleichanteil zu extrahieren und getrennt zu übertragen. Verbindet man nun Gleichung 37 mit  $y_i = \langle \vec{a}_i^T \cdot \vec{x} \rangle$ , so ist bei Verwendung der optimalen Konstanten

$$y_i - k_i = \vec{a}_i^T \cdot (\vec{x} - E[\vec{x}]) \quad (38)$$

$$\text{mit } e = E\left[\sum_{i=M}^{N-1} (y_i - k_i)^2\right] \quad (39)$$

$$\implies e = \sum_{i=M}^{N-1} \vec{a}_i^T \cdot E[(\vec{x} - E[\vec{x}])(\vec{x} - E[\vec{x}])^T] \cdot \vec{a}_i \quad (40)$$

$$\implies e = \sum_{i=M}^{N-1} \vec{a}_i^T \cdot \text{Cov}(\vec{x}) \cdot \vec{a}_i \quad (41)$$

Zur Bestimmung der optimalen Transformation muß der mittlere Rekonstruktionsfehler minimiert werden, wobei die Orthonormalität erhalten bleiben muß. Dies kann mit der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode erreicht werden: anstelle von  $e$  wird eine von  $e$  abgeleitete Größe

$$\acute{e} = e - \sum_{i=M}^{N-1} \lambda_i (\vec{a}_i^T \vec{a}_i - 1) \quad (42)$$

$$= \sum_{i=M}^{N-1} \vec{a}_i^T \cdot \text{Cov}(\vec{x}) \cdot \vec{a}_i - \lambda_i (\vec{a}_i^T \vec{a}_i - 1) \quad (43)$$

minimiert. (Bei Orthonormalität wird  $\vec{a}_i^T \vec{a}_i - 1 = 0$  und damit  $\acute{e} = e$ ). Die optimalen Basisvektoren findet man, indem für jeden Index  $i$  der Gradient von  $\acute{e}$

bezüglich  $\vec{a}_i$  bestimmt und nullgesetzt wird, was zu dem bekannten Eigenwertproblem führt

$$\text{grad}_{\vec{a}_i} \epsilon = 2 \cdot \text{Cov}(\vec{x}) - \lambda_i(2\vec{a}_i) = 0 \quad (44)$$

$$(\text{Cov}(\vec{x}) - \lambda_i \cdot E)\vec{a}_i = 0 \quad (45)$$

### 3.3 Eigenschaften der Transformationsmatrix

Die geforderte Dekorrelation der Eingangsvektoren ergibt sich schon aus der Herleitung (s. Gleichung 10). Als weitere Bedingung wurde die Existenz der inversen Transformationsmatrix gefordert. Da  $\mathbf{A}$ , wie im vorletzten Abschnitt gezeigt wurde, eine orthogonale Matrix mit normierten Zeilenvektoren ist, gilt die Relation

$$A^{-1} = A^T \quad (46)$$

Diese die Bestimmung der inversen Transformationsmatrix sehr vereinfachende Relation läßt sich leicht beweisen:

$$A^{-1} \cdot A = E \quad (47)$$

$$A^T \cdot A = E \implies \langle \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j \rangle = \delta_{ij} \quad (48)$$

Da der letzte Ausdruck gleichsam eine Definition für die Orthonormalität zweier Vektoren  $\vec{a}_i$  und  $\vec{a}_j$  ist, wird er auch von den Zeilenvektoren der Transformationsmatrix für die KLT erfüllt. Die letzte zu beweisende Forderung bezieht sich auf die Informationserhaltung; zum Beweis dieser Eigenschaft können zwei Eigenschaften verwendet werden:

1. Wie schon gezeigt wurde, gehört die KLT zu den reversiblen Transformationen (inverse Transformation existiert) - diese müssen aber informationserhaltend sein.
2. Die KLT ist eine eindeutige (bijektive) Abbildung - somit gilt  $P(\vec{X}) = P(A \cdot \vec{X})$

Aus der letzten Aussage folgt für die Entropie

$$H(\vec{Y}) = H(A \cdot \vec{X}) = - \sum P(A \cdot \vec{X}) \log_2 P(A \cdot \vec{X}) \quad (49)$$

$$= - \sum P(\vec{X}) \log_2 P(\vec{X}) = H(\vec{X}) \quad (50)$$

### 3.4 Aufwandschätzung für die KLT

Exemplarisch soll nun der Aufwand für die Transformation eines eindimensionalen Signals geschätzt werden, wobei die Transformation gemäß Abbildung 1 ablaufen soll. Als Quelle soll ein Audiosignal dienen, welches mit einer Abtastfrequenz von  $f_T = 8kHz$  abgetastet und mit einer Genauigkeit von 8 Bit/Sample

quantisiert wurde. Bei einer Aufzeichnungsdauer von einer Minute ergibt sich für das „Rohdatenmaterial“ ein Speicherplatzbedarf von  $60s \cdot 8 \text{ kByte/s} = 480 \text{ kByte}$ <sup>5</sup>. Da die Transformationsmatrix der KLT aus der Kovarianzmatrix berechnet wird, müssen diese Daten zur Analyse gespeichert werden - eine Streaming - oder Echtzeittransformation ist nicht möglich. Im weiteren Verlauf sollen die Daten segmentweise mit  $N=8$  Werten/Segment transformiert werden - insgesamt müssen somit  $S=6 \cdot 10^4$  Segmente verarbeitet werden. Zunächst muß die Kovarianzmatrix der Segmente,  $Cov(X_i, X_j)$ , berechnet werden. Die Gleichung zur Berechnung der Elemente der Kovarianzmatrix lautet (s. Gleichung 14)

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i) \cdot E(X_j) \quad (51)$$

$$= \frac{1}{S} \cdot \sum_{k=1}^S [x_{ik} \cdot x_{jk}] - \frac{1}{S^2} \cdot \sum_{l=1}^S x_{il} \cdot \sum_{m=1}^S x_{jm} \quad (52)$$

Die Indexkonvention ist in Abbildung 2 erläutert:

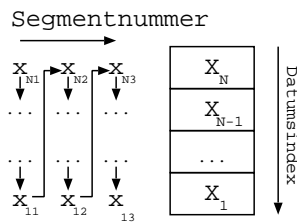


Abbildung 2: Bedeutung der Indizes in  $x_{kl}$

Es empfiehlt sich, zuerst die Mittelwerte  $E(X_i) = \frac{1}{S} \cdot \sum_{k=1}^S x_{ik}$  zu berechnen und abzuspeichern, da sie auch noch für die Varianzberechnung benötigt werden. Für die  $N$  Mittelwerte werden jeweils  $S$  Additionen und eine Division benötigt, sowie Speicherplatz für  $N$  zusätzliche Fließkommawerte. Für jeden der  $N^2$  Elemente der Kovarianzmatrix muß  $\frac{1}{S} \cdot \sum_{k=1}^S [x_{ik} \cdot x_{jk}]$  ermittelt werden; dazu werden jeweils  $(S + 1)$  Multiplikationen/Divisionen und  $S$  Additionen/Subtraktionen benötigt. für den kompletten Term  $\frac{1}{S} \cdot \sum_{k=1}^S [x_{ik} \cdot x_{jk}] - \frac{1}{S^2} \cdot \sum_{l=1}^S x_{il} \cdot \sum_{m=1}^S x_{jm}$  werden dann noch jeweils eine Subtraktion und eine Multiplikation benötigt.

Die eigentliche Transformationsmatrix ergibt sich aus der Kovarianzmatrix, ab hier kurz  $\mathbf{C}$ , durch Lösung des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{C} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \vec{a}_i = \vec{0} \quad (53)$$

Laut der vorliegenden Literatur [6] ist zuerst die Bestimmung der Eigenwerte  $\lambda_i$  notwendig, bevor die Eigenvektoren  $\vec{a}_i$  berechnet werden können. Da es sich

<sup>5</sup>hier entspricht 1 kByte  $10^3$  Bytes!

bei Gleichung 53 um ein homogenes Gleichungssystem N-ter Ordnung handelt, existiert eine nichttriviale Lösung für

$$\det |C - \lambda_i \cdot E| = 0 \quad (54)$$

Bei der Auflösung der Eigenwertgleichung 54 entsteht ein Polynom N-ten Grades, dessen Auflösung zu den N Eigenwerten führt. Es ist leicht einzusehen, daß die numerische Lösung für große N recht schwierig wird. Mit diesen Eigenwerten können durch Einsetzung derselben in 53 die N Eigenvektoren bestimmt werden, welche ja die gesuchten Zeilenvektoren der Transformationsmatrix sind. Zu beachten ist dabei allerdings, daß z.B. der Gaußsche Lösungsalgorithmus für das homogene Gleichungssystem nur die Triviallösung  $\vec{a}_i = \vec{0}$ ,  $i \in [0..N - 1]$  liefert (nachdem die Koeffizientenmatrix in die Dreiecksform umgewandelt wurde, lautet die unterste Zeile  $\alpha \cdot a_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$  - für die nächste Zeile folgt  $\beta \cdot a_{n-1} + \gamma \cdot a_n = 0$ , mit  $a_n = 0 \Rightarrow a_{n-1} = 0$  usw.). Um diesen Rechenaufwand und die Notwendigkeit der Datenanalyse<sup>6</sup> überhaupt zu umgehen, könnte man eine für die zu erwartenden Datenströme angepaßte Transformationsmatrix verwenden - dann wäre die Transformation allerdings nicht mehr optimal. Bis zum heutigen Tage wurde noch keine Optimierung der KLT ähnlich der FFT gefunden, allerdings existiert eine approximierte KLT, welche das Ergebnis der Doktorarbeit von Rainer Nawrath (1967) ist. Allerdings handelt es sich dabei nicht um einen neuen Algorithmus, sondern um eine Verwirklichung in reiner Festkommaarithmetik - was für die damaligen Prozessoren, welche über keine oder nur sehr langsame FPU's<sup>7</sup> verfügten, ein Vorteil darstellte.

## 4 Die diskrete Kosinustransformation

Will man die für die KLT nötige Datenanalyse umgehen, so ergeben sich neben neben der angesprochenen Möglichkeit der Verwendung einer „geschätzten“ Transformationsmatrix auch noch weitere Möglichkeiten, die auf anderen Transformationen aufbauen. Eine der in der Realität (JPEG, MPEG, ...) oft genutzten Transformation ist die DCT, welche einen Sonderfall der (diskreten) Fouriertransformation darstellt. Die Ableitung von dieser und die sich ergebenden Einschränkungen sollen Gegenstand dieses Abschnittes sein.

### 4.1 Ableitung der DCT von der Fouriertransformation

Für den folgenden Abschnitt sei das Wissen über Fouriertransformation und ihrer Rechenregeln in den Grundzügen vorausgesetzt - andernfalls empfiehlt es sich,

---

<sup>6</sup>z.B. für Streaminganwendungen

<sup>7</sup>Floating Point Units

das entsprechende Kapitel in [2] vorher durchzuarbeiten.

Ausgehend von den Transformationsgleichungen

$$F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt, \text{ wenn } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \text{ existiert.} \quad (55)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (56)$$

läßt sich die Berechnung in Abhängigkeit von bestimmten Eigenschaften des zu transformierenden Signals vereinfachen. Kann man davon ausgehen, daß als Eingangssignale nur gerade Funktionen vorkommen ( $f(t) = f(-t)$ ), so vereinfacht sich die Transformationsgleichung 55 zu

$$\sqrt{2\pi} \cdot F(j\omega) = \int_{-\infty}^0 f(t) \cdot e^{-j\omega t} + \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \quad (57)$$

$$= \int_0^{\infty} f(-t) \cdot e^{j\omega t} + \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \quad (58)$$

mit  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$  ist  $\sqrt{2\pi} \cdot F(j\omega)$

$$= \int_0^{\infty} f(t) \cdot [\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t) + \cos(-\omega t) + j \cdot \sin(-\omega t)] \quad (59)$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad (60)$$

Da in der Praxis nur kausale ( $f(t) \equiv 0$  für  $t < 0$ ) und zeitlich begrenzte Signale relevant sind, können diese immer zu einer geraden Funktion dadurch ergänzt werden, indem man die (jetzt vorausgreifend als wertdiskret angesehene) Eingangssfolge mit ihrer am Ursprung gespiegelten Version überlagert. Allerdings erhält man dadurch eine Folge  $[x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0] + [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ , in welcher  $x_0$  doppelt vorkommt - dies muß durch einen entsprechenden Korrekturfaktor  $\alpha(n)$  berücksichtigt werden. Hervorzuheben ist, daß es sich bei dieser Transformationsgleichung (60) nur um eine für einen bestimmten Sonderfall umgestellte Fouriertransformationsgleichung handelt - die für diese bekannten Rechengesetze gelten weiterhin.

## 4.2 die diskrete Form

Für die Umsetzung auf Digitalrechnern ist zu beachten, daß diese Signale nur in zeit/frequenz- bzw. amplitudendiskreter Form verarbeiten können. Auf die Folgen der Quantisierung soll hier allerdings nicht eingegangen werden, um den Rahmen des Vortrages nicht zu sprengen. Im Folgenden soll nun der Übergang von dem zeit- und frequenzkontinuierlichen Fall zum diskreten Fall, zur eigentlichen DCT beschrieben werden. Ein zeitdiskretes Eingangssignal  $x(kT)$  läßt sich aus dem kontinuierlichen Signal  $x(t)$  durch Abtastung, hier durch Multiplikation mit

einem Deltakamm  $\delta_T(t)$  gewinnen (s. Abbildung 1). Setzt man diesen Ausdruck in die Transformationsgleichung 60 ein, so erhält man

$$f(kT) = f(t) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (61)$$

$$\tilde{F}(j\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \cdot f(t) \cdot \cos(\omega t) \quad (62)$$

Nach dem Vertauschen von Integration und Summation und Beachtung der Ausblendeigenschaften des Deltaimpulses

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = f(\tau) \quad (63)$$

ergibt sich  $\tilde{F}(j\omega)$  nach Beschränkung auf N Summanden zu

$$\tilde{F}(j\omega) = \sqrt{\frac{2\alpha(n)}{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \cdot \cos(\omega kT) \quad (64)$$

$$\alpha(n) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} & : k = 0 \\ 1 & : k = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (65)$$

Dabei ist  $\alpha(n)$  der in 4.1 angesprochene Korrekturfaktor, welcher wie  $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$  auf Hin- und Rücktransformation verteilt wird. Der Term  $\frac{1}{N}$  ergibt sich aus der Forderung  $F^{-1}(F(u_n)) = u_n$ . Zur Vereinfachung der Gleichungen soll  $\alpha(n)$  nun wie folgt definiert sein:

$$\alpha(n) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & : k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & : k = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (66)$$

Vereinfachend nimmt man eine Abtastfrequenz  $f_T = 1 \Rightarrow T = 1$  an, so daß  $f(kT)$  auch als Folge  $f_k$  betrachten kann

$$\tilde{F}(j\Omega) = \alpha(n) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \cos(k\Omega) \quad (67)$$

In dieser Form ist die Transformierte  $F(j\Omega)$  allerdings noch eine kontinuierliche Funktion. Im nächsten Schritt wird daher das kontinuierliche  $\Omega$  durch den wertdiskreten Ausdruck  $n \cdot \Delta\Omega$  ersetzt.

$$\tilde{F}(jn\Delta\Omega) = \alpha(n) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \cos(kn\Delta\Omega) \quad (68)$$

Die Frage nach der Größe von  $\Delta\Omega$  bzw. nach dem dargestellten Frequenzabschnitt beantwortet sich, wenn man das Spektrum des abgetasteten Signals betrachtet. Nach

$$F\{u(t) \cdot \delta_T(t)\}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} U(j\omega) \cdot \omega_T \cdot \delta_{\omega_T}(\omega) = U(j\Omega) \cdot \delta_{2\pi}(\Omega) \quad (69)$$

entspricht dieses der Wiederholung des Spektrums des kontinuierlichen Signals,  $U(j\Omega)$ , mit der normierten Abtastfrequenz  $2\pi$  (s. Abbildung 3). Da das Spektrum

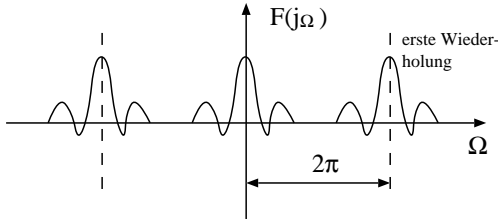


Abbildung 3: Spektrum des abgetasteten Signals

somit  $2\pi$ -periodisch und innerhalb des Periodizitätsintervalles zu  $\pi$  symmetrisch ist<sup>8</sup>, kann der Spektralbereich auf das Intervall  $[0.. \pi]$  beschränkt werden. Somit ergibt sich  $\Delta\Omega$  sinnvollerweise zu  $\Delta\Omega = \frac{\pi}{N}$ . Die Verwendung von 68 bringt die gleichen Probleme mit sich wie die Verwendung der DFT - aus Sicht dieser Transformationen sind Eingangssignale zeitlich unendlich ausgedehnt. Sind diese aber, was auf praxisrelevante Signale immer zutrifft, zeitlich beschränkt, so lassen sich diese Signale als Produkt eines zeitlich unendlich ausgedehnten Signales und einer Rechteckfunktion darstellen. Die Transformierte dieses Signals ist aber

$$F\{u(t) \cdot \Pi_{2T_m}(t)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot U(j\omega) * 2T_m \text{si}(T_m\omega) \quad (70)$$

eine Faltung des Spektrums des kontinuierlichen Signals mit der Transformierten der „Fensterfunktion“  $\Pi_{2T_m}(t)$ . Diese ist um so ausgedehnter, je kleiner der damit ausgeblendete Zeitbereich  $T_m$  ist. Hinzu kommt, daß durch die Abtastung im Frequenzbereich (auch die Transformierte ist eine diskrete Funktion) das zurücktransformierte Signal eine periodische Wiederholung des ursprünglichen Zeitsignals ist. Kommt es zwischen den Wiederholungen zu „Sprüngen“, so bedingen diese im Frequenzbereich ausgedehnte Störungen (ein Beispiel sind die bekannten „Kreuze“, die bei der zweidimensionalen Fouriertransformation von Bildern im Frequenzspektrum entstehen, wenn z.B. ein dunkler Bereich im unteren Teil des Bildes durch diese zyklische Wiederholung an einen hellen Bereich im oberen Teil der ersten Wiederholung angrenzt - ein Bildbeispiel findet sich dazu in [1], S.94). Um diese Effekte abzumindern, greift man bei der DCT zu einem weiteren Trick: Gleichung 68 ähnelt sehr der Synthesegleichung für eine Fourierreihe, wenn (wie auch angenommen) gerade Funktionen entwickelt werden. Nun gibt es noch weitere Symmetrieeigenschaften, welche zum Wegfall bestimmter Koeffizienten führen. So gilt z.B. für Signale mit Halbwellensymmetrie ( $f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$ ), daß die geraden Koeffizienten  $\equiv 0$  sind. Ergänzt man die Zeitreihe nochmals zu einer solchen Funktion, so ergeben sich (s. Abbildung 4) zwei Vorteile. Erstens wurde

<sup>8</sup>Für rein reelle Eingangssignale ist der Realanteil der Fouriertransformierten (cos()-Anteil) eine gerade Funktion

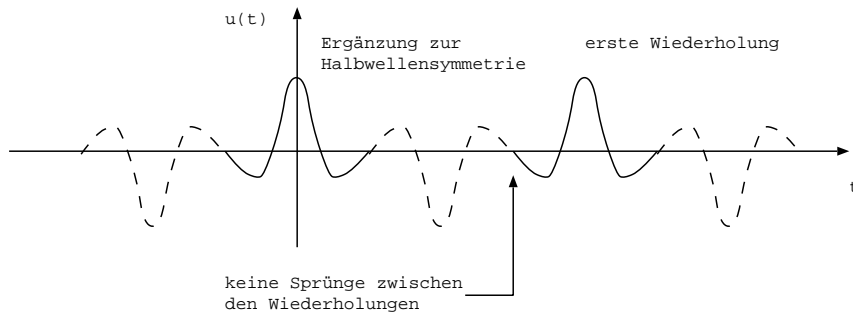


Abbildung 4: Vorteile der Ergänzung zur Halbwellensymmetrie

das Signal künstlich verbreitert, zweitens gibt es keine Sprünge mehr zwischen den Wiederholungen. Es sind nicht einmal mehr Berechnungen nötig; denn obwohl jetzt durch die Verbreiterung  $2N$  Werte einbezogen werden müssen (damit ist  $\Delta\Omega = \frac{\pi}{2N}$ ) fallen die geraden Koeffizienten aus der Berechnung heraus (s.  $\uparrow$ ). Somit kann jetzt die eigentliche Transformationsgleichung der DCT und die inverse Transformationsgleichung (ohne Beweis) angegeben werden:

$$y_n = \alpha(n) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \cos\left(\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right) \quad (71)$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) \cdot y_k \cdot \cos\left(\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right) \quad (72)$$

$$\alpha(n) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & : \quad k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & : \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (73)$$

Die DCT ist laut [5] sehr gut geeignet für die Verarbeitung hochkorrelierter Signale, was sich auch in der Ähnlichkeit ihrer Basisvektoren mit denen der KLT zeigt (Beispiel in [5] für einen hochkorrelierten Markoffprozeß). Insbesondere bei der Bildcodierung kommen die Ergebnisse der DCT sehr nahe an die Ergebnisse der KLT heran.



## Literatur

- [1] Peter Noll, Skript *Statistische Nachrichtentheorie*
- [2] Peter Noll, Skript *Signale und Systeme*
- [3] Eberhard Hänsler, *Statistische Signale*
- [4] Thomas Sikora, Skript *Entwicklungstendenzen im Multimediabereich*
- [5] Kai Clüver, Skript *Digitale Nachrichtenverarbeitung, Institut für Nachrichtentechnik der TU Berlin (1998)*
- [6] Henning Brune, *Analyse von ein- und mehrreihigen Zeitreihen mit Karhunen-Loeve- und Wavelet-Transformation (Diplomarbeit, Universität Bielefeld, 1997)*
- [7] C. E. Shannon/W. Weaver, *The mathematical theory of communication. University of Illinois Press, Urbana, 1949*