Anwendung von Root-MUSIC zur Lokalisierung multipler akustischer Quellen durch Mikrofonarrays

Rüdiger Knörig

Technische Universität Berlin
Institut für Telekommunkationssysteme
Fachgebiet Nachrichtenübertragung
Einsteinufer 17
D-10587 Berlin
email: ruediger@knoerig.de

Aufgabenstellung

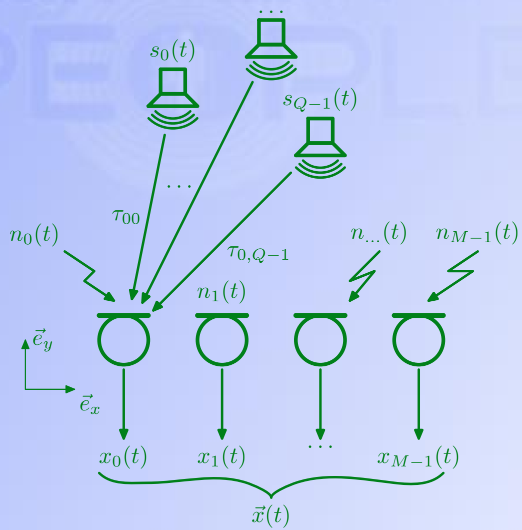
- Robuste Lokalisierung einer unbekannten Anzahl an akustischen Quellen

Aufgabenstellung

- Robuste Lokalisierung einer unbekannten Anzahl an akustischen Quellen
- aus den Ausgangssignalen eines Uniform Linear Arrays.

Aufgabenstellung

- Robuste Lokalisierung einer unbekannten Anzahl an akustischen Quellen
- aus den Ausgangssignalen eines Uniform Linear Arrays.



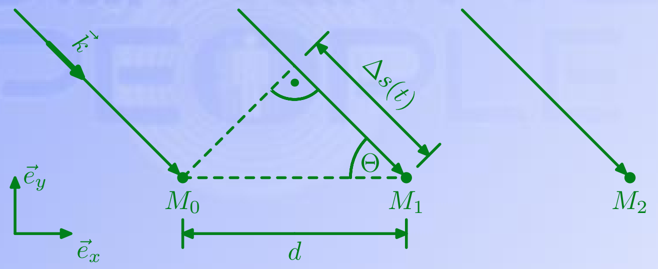
Fernfeldsignalmodell

- Entfernung zwischen Quelle und Array groß

Fernfeldsignalmodell

- Entfernung zwischen Quelle und Array groß

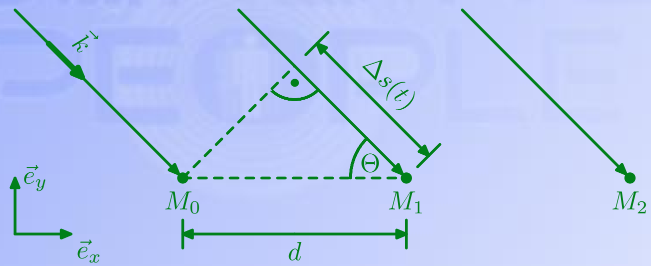
$\Rightarrow$ Wellenfronten nahezu planar / Wellenvektoren $\vec{k}$ an allen Mikrofonen parallel



Fernfeldsignalmodell

- Entfernung zwischen Quelle und Array groß

$\Rightarrow$ Wellenfronten nahezu planar / Wellenvektoren $\vec{k}$ an allen Mikrofonen parallel



$\Rightarrow$ Peilung beschränkt sich auf die Feststellung des Einfallswinkel Θ.

Gliederung

1. Übersicht über gängige Lösungsansätze.

Gliederung

1. Übersicht über gängige Lösungsansätze.
2. Einführung Subspace-Verfahren MUSIC.

Gliederung

1. Übersicht über gängige Lösungsansätze.
2. Einführung Subspace-Verfahren MUSIC.
3. Verbesserung Root-MUSIC.

Gliederung

1. Übersicht über gängige Lösungsansätze.
2. Einführung Subspace-Verfahren MUSIC.
3. Verbesserung Root-MUSIC.
4. Ergebnisse.

Lösungsansätze

- korrelationsbasierende Verfahren

Lösungsansätze

- korrelationsbasierende Verfahren
- Beamformer

Lösungsansätze

- korrelationsbasierende Verfahren
- Beamformer
- *maximum-likelyhood*-Ansätze

Lösungsansätze

- korrelationsbasierende Verfahren
- Beamformer
- *maximum-likelyhood*-Ansätze
- Subspace-Verfahren

Lösungsansätze

- korrelationsbasierende Verfahren
- Beamformer
- *maximum-likelyhood*-Ansätze
- Subspace-Verfahren

Subspace-Verfahren MUSIC

MUSIC multiple signal classification.

Subspace-Verfahren MUSIC

MUSIC multiple signal classification.

Subspace-Verfahren

Subspace-Verfahren MUSIC

MUSIC multiple signal classification.

Grundidee: Separierung der Peilungen in

Subspace-Verfahren MUSIC

MUSIC multiple signal classification.

Grundidee: Separierung der Peilungen in

- Signalkomponenten und

Subspace-Verfahren MUSIC

MUSIC multiple signal classification.

Grundidee: Separierung der Peilungen in

- Signalkomponenten und
- Störkomponenten.

Subspace-Verfahren MUSIC

MUSIC multiple signal classification.

Grundidee: Separierung der Peilungen in

- Signalkomponenten und
- Störkomponenten.

+ Erfaßt Anzahl und Position mehrerer gleichzeitig aktiver Quellen.

Subspace-Verfahren MUSIC

MUSIC multiple signal classification.

Grundidee: Separierung der Peilungen in

- Signalkomponenten und
- Störkomponenten.

+ Erfaßt Anzahl und Position mehrerer gleichzeitig aktiver Quellen.

- Solange diese unkorreliert zueinander sind.

Herleitung

Herleitung

- Simpelster Fall: 2 Mikrofone, 1 Quelle.

Herleitung

- Simpelster Fall: 2 Mikrofone, 1 Quelle.
- Für die Mikrofonsignale gilt dann

$$x_0(k) = s_0(k) + n_0(k) \tag{1}$$
$$x_1(k) = s_0(k - \Delta l_0) + n_1(k) \tag{2}$$

Herleitung

- Simpelster Fall: 2 Mikrofone, 1 Quelle.
- Für die Mikrofonsignale gilt dann

$$x_0(k) = s_0(k) + n_0(k) \tag{1}$$

$$x_1(k) = s_0(k - \Delta l_0) + n_1(k) \tag{2}$$

- und unter der Annahme von Unkorreliertheit zwischen $s_0(k)$ und $n_{0/1}(k)$

(3)

(4)

Herleitung

- Simpelster Fall: 2 Mikrofone, 1 Quelle.
- Für die Mikrofonsignale gilt dann

$$x_0(k) = s_0(k) + n_0(k) \tag{1}$$
$$x_1(k) = s_0(k - \Delta l_0) + n_1(k) \tag{2}$$

- und unter der Annahme von Unkorreliertheit zwischen $s_0(k)$ und $n_{0/1}(k)$

$$X_0(j\Omega) \cdot X_1(j\Omega)^* = |S(j\Omega)|^2 \cdot e^{j\Omega\Delta l_0} \text{ (Signalkomponente)} \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Herleitung

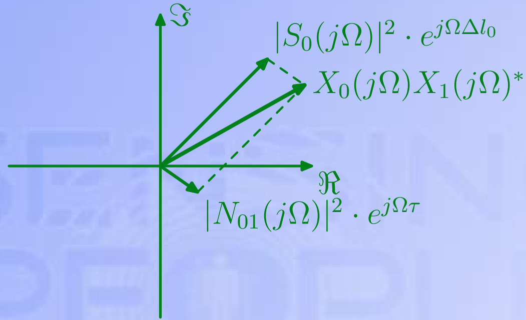
- Simpelster Fall: 2 Mikrofone, 1 Quelle.
- Für die Mikrofonsignale gilt dann

$$x_0(k) = s_0(k) + n_0(k) \tag{1}$$
$$x_1(k) = s_0(k - \Delta l_0) + n_1(k) \tag{2}$$

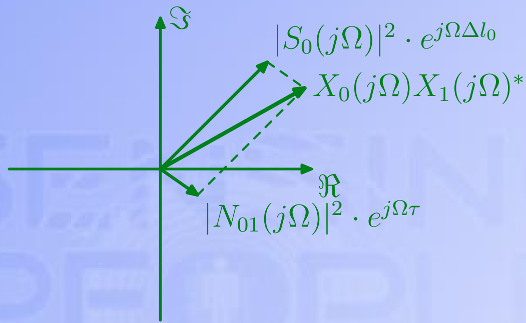
- und unter der Annahme von Unkorreliertheit zwischen $s_0(k)$ und $n_{0/1}(k)$

$$X_0(j\Omega) \cdot X_1(j\Omega)^* = |S(j\Omega)|^2 \cdot e^{j\Omega\Delta l_0} \text{ (Signalkomponente)} \tag{3}$$
$$+|N_{01}(j\Omega)|^2 \cdot e^{j\Omega\tau} \text{ (Störkomponente)} \tag{4}$$

Graphische Interpretation

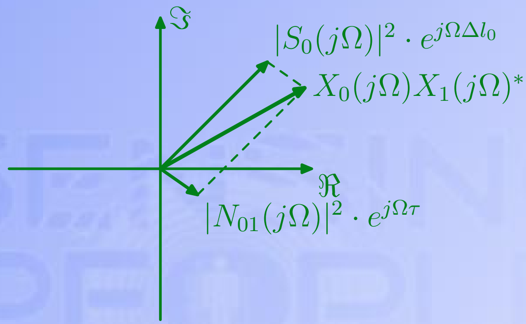


Graphische Interpretation



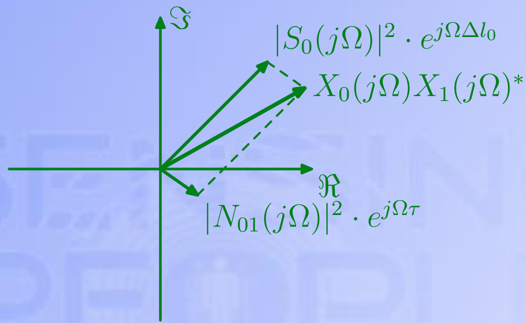
- Die Signalkomponente ist betragsmäßig größer und besitzt eine konstante Phase.

Graphische Interpretation



- Die Signalkomponente ist betragsmäßig größer und besitzt eine konstante Phase.
- Die Störkomponente ist betragsmäßig kleiner und besitzt eine zufällige Phase.

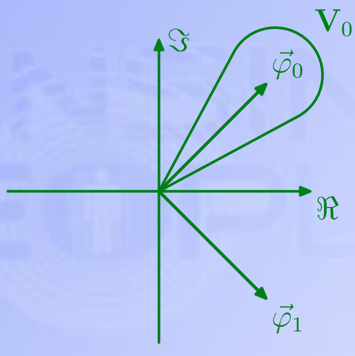
Graphische Interpretation



- Die Signalkomponente ist betragsmäßig größer und besitzt eine konstante Phase.
- Die Störkomponente ist betragsmäßig kleiner und besitzt eine zufällige Phase.

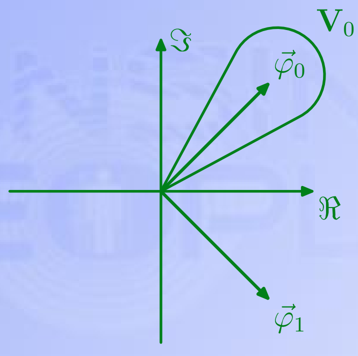
Subraumdarstellung

- $X_0(j\Omega) \cdot X_1(j\Omega)^*$ existiert in einem Vektorraum $\mathbf{V}_0 \subset \mathcal{R}^2$



Subraumdarstellung

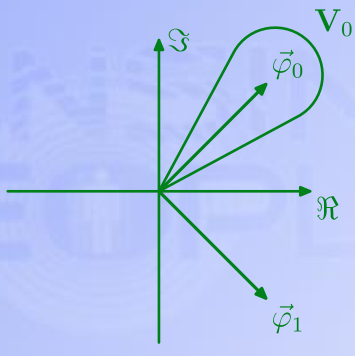
- $X_0(j\Omega) \cdot X_1(j\Omega)^*$ existiert in einem Vektorraum $\mathbf{V}_0 \subset \mathcal{R}^2$



- Dieser Vektorraum besitzt die Hauptachsen/vektoren $\vec{\varphi}_{0/1}$.

Subraumdarstellung

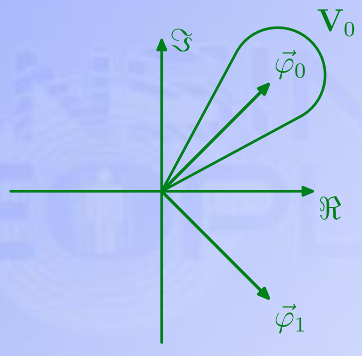
- $X_0(j\Omega) \cdot X_1(j\Omega)^*$ existiert in einem Vektorraum $\mathbf{V}_0 \subset \mathcal{R}^2$



- Dieser Vektorraum besitzt die Hauptachsen/vektoren $\vec{\varphi}_{0/1}$.
- $\vec{\varphi}_0$ bildet die Basis eines Signalunterraums $\mathbf{U}_S$.

Subraumdarstellung

- $X_0(j\Omega) \cdot X_1(j\Omega)^*$ existiert in einem Vektorraum $\mathbf{V}_0 \subset \mathcal{R}^2$



- Dieser Vektorraum besitzt die Hauptachsen/vektoren $\vec{\varphi}_{0/1}$.
- $\vec{\varphi}_0$ bildet die Basis eines Signalunterraums $\mathbf{U}_S$.
- $\vec{\varphi}_1$ bildet die Basis des orthogonalen Rauschunterraums $\mathbf{U}_N$.

MUSIC-Idee

- $\mathbf{U}_s$ und $\mathbf{U}_N$ sind orthogonal.

MUSIC-Idee

- $\mathbf{U}_s$ und $\mathbf{U}_N$ sind orthogonal.

$\Rightarrow$ Für einen Vektor $\vec{e} = e^{j\varphi}$ ist die Abbildung $\langle \vec{e}, \mathbf{U}_N \rangle$ den Rauschunterraum betragsmäßig am kleinsten, wenn er die gleiche Phase wie $\vec{\varphi}_0$ hat.

MUSIC-Idee

- $\mathbf{U}_s$ und $\mathbf{U}_N$ sind orthogonal.

$\Rightarrow$ Für einen Vektor $\vec{e} = e^{j\varphi}$ ist die Abbildung $\langle \vec{e}, \mathbf{U}_N \rangle$ den Rauschunterraum betragsmäßig am kleinsten, wenn er die gleiche Phase wie $\vec{\varphi}_0$ hat.

$\Rightarrow |\langle \vec{e}, \mathbf{U}_N \rangle|^2 = \left(\vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N\right) \cdot \left(\vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N\right)^H = \vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \cdot \vec{e} \rightarrow 0.$

MUSIC-Idee

- $\mathbf{U}_s$ und $\mathbf{U}_N$ sind orthogonal.

$\Rightarrow$ Für einen Vektor $\vec{e} = e^{j\varphi}$ ist die Abbildung $\langle \vec{e}, \mathbf{U}_N \rangle$ den Rauschunterraum betragsmäßig am kleinsten, wenn er die gleiche Phase wie $\vec{\varphi}_0$ hat.

$$\Rightarrow |\langle \vec{e}, \mathbf{U}_N \rangle|^2 = \left(\vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N\right) \cdot \left(\vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N\right)^H = \vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \cdot \vec{e} \rightarrow 0.$$

- Existiert eine Beziehung zwischen Einfallswinkel Θ und dem Laufzeitunterschied $\Delta l_0 (\Theta)$,

MUSIC-Idee

- $\mathbf{U}_s$ und $\mathbf{U}_N$ sind orthogonal.

$\Rightarrow$ Für einen Vektor $\vec{e} = e^{j\varphi}$ ist die Abbildung $\langle \vec{e}, \mathbf{U}_N \rangle$ den Rauschunterraum betragsmäßig am kleinsten, wenn er die gleiche Phase wie $\vec{\varphi}_0$ hat.

$\Rightarrow$ $|\langle \vec{e}, \mathbf{U}_N \rangle|^2 = \left(\vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N\right) \cdot \left(\vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N\right)^H = \vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \cdot \vec{e} \longrightarrow 0.$

- Existiert eine Beziehung zwischen Einfallswinkel Θ und dem Laufzeitunterschied $\Delta l_0\,(\Theta)$,
- dann kann der Einfallswinkel aus dem Minimum von $\vec{e}^H \cdot \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \cdot \vec{e}$ mit $\vec{e} = e^{j\Omega\Delta l_0(\Theta)}$ bestimmt werden.

mehrere Quellen

- Zur Lokalisierung von Q Quellen muß es mindestens $Q+1$ Hauptachsen geben.

mehrere Quellen

- Zur Lokalisierung von Q Quellen muß es mindestens $Q+1$ Hauptachsen geben.
  - Q Hauptachsen für den Signalunterraum und

mehrere Quellen

- Zur Lokalisierung von Q Quellen muß es mindestens $Q + 1$ Hauptachsen geben.
  - Q Hauptachsen für den Signalunterraum und
  - mindestens eine Hauptachse für den Rauschunterraum.

mehrere Quellen

- Zur Lokalisierung von Q Quellen muß es mindestens $Q+1$ Hauptachsen geben.
  - Q Hauptachsen für den Signalunterraum und
  - mindestens eine Hauptachse für den Rauschunterraum.

$\Rightarrow \mathbf{V}_0 \in \mathcal{R}^N$, $N \geq Q+1$.

mehrere Quellen

- Zur Lokalisierung von Q Quellen muß es mindestens $Q+1$ Hauptachsen geben.
  - Q Hauptachsen für den Signalunterraum und
  - mindestens eine Hauptachse für den Rauschunterraum.

$\Rightarrow \mathbf{V}_0 \in \mathcal{R}^N$, $N \geq Q+1$.

- Die Hauptachsen $\vec{\varphi}_{0/1}$ ergeben sich nach dem Satz über Hauptachsentransformation als Eigenvektoren der spektralen Kovarianzmatrix.

Schmal– und Breitband-Music

- Diese Kovarianzmatrix kann auf zwei verschiedenen Wegen definiert werden:

Schmal– und Breitband-Music

- Diese Kovarianzmatrix kann auf zwei verschiedenen Wegen definiert werden:
- Schmalband-MUSIC
  - Der Frequenzbereich wird soweit eingeengt, daß

$$|S(j\Omega)|^2 \cdot e^{j\Omega\Delta l_0} \approx A \cdot e^{j\Omega_0\Delta l_0} \text{ gilt.} \tag{5}$$

Schmal– und Breitband-Music

- Diese Kovarianzmatrix kann auf zwei verschiedenen Wegen definiert werden:
- Schmalband-MUSIC
  - Der Frequenzbereich wird soweit eingeengt, daß

$$|S(j\Omega)|^2 \cdot e^{j\Omega\Delta l_0} \approx A \cdot e^{j\Omega_0\Delta l_0} \text{ gilt.} \tag{5}$$

  - Die Kovarianzmatrix repräsentiert die Phasenbeziehungen zwischen den Mikrofonkanälen.

Schmal– und Breitband-Music

- Diese Kovarianzmatrix kann auf zwei verschiedenen Wegen definiert werden:
- Schmalband-MUSIC
  - Der Frequenzbereich wird soweit eingeengt, daß

$$|S(j\Omega)|^2 \cdot e^{j\Omega\Delta l_0} \approx A \cdot e^{j\Omega_0\Delta l_0} \text{ gilt.} \tag{5}$$

  - Die Kovarianzmatrix repräsentiert die Phasenbeziehungen zwischen den Mikrofonkanälen.
- Breitband-MUSIC

Schmal– und Breitband-Music

- Diese Kovarianzmatrix kann auf zwei verschiedenen Wegen definiert werden:
- Schmalband-MUSIC
  - Der Frequenzbereich wird soweit eingeengt, daß

$$|S(j\Omega)|^2 \cdot e^{j\Omega\Delta l_0} \approx A \cdot e^{j\Omega_0\Delta l_0} \text{ gilt.} \tag{5}$$

  - Die Kovarianzmatrix repräsentiert die Phasenbeziehungen zwischen den Mikrofonkanälen.
- Breitband-MUSIC
  - Verwendung von zwei Mikrofonkanälen.

Schmal– und Breitband-Music

- Diese Kovarianzmatrix kann auf zwei verschiedenen Wegen definiert werden:
- Schmalband-MUSIC
  - Der Frequenzbereich wird soweit eingeengt, daß

$$|S(j\Omega)|^2 \cdot e^{j\Omega\Delta l_0} \approx A \cdot e^{j\Omega_0\Delta l_0} \text{ gilt.} \tag{5}$$

  - Die Kovarianzmatrix repräsentiert die Phasenbeziehungen zwischen den Mikrofonkanälen.
- Breitband-MUSIC
  - Verwendung von zwei Mikrofonkanälen.
  - Die Kovarianzmatrix repräsentiert die Phasenbeziehungen zwischen den Frequenzkomponenten.

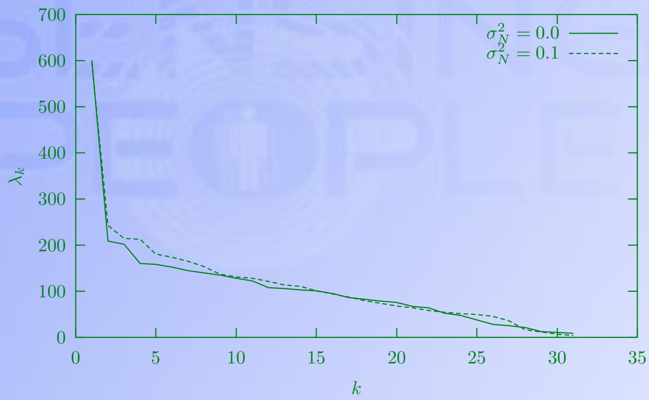
Bestimmung der Quellenanzahl

Bestimmung der Quellenanzahl

- Signaleigenvektoren besitzen große Eigenwerte $\longrightarrow$ Quellenanzahl aus dem Vektor der Eigenwerte bestimmbar.

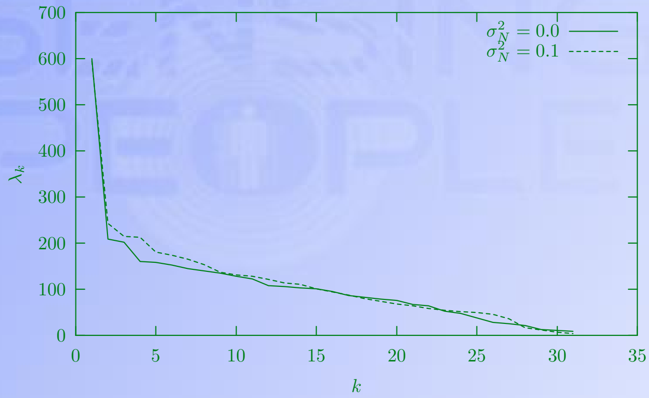
Bestimmung der Quellenanzahl

- Signaleigenvektoren besitzen große Eigenwerte → Quellenanzahl aus dem Vektor der Eigenwerte bestimmbar.



Bestimmung der Quellenanzahl

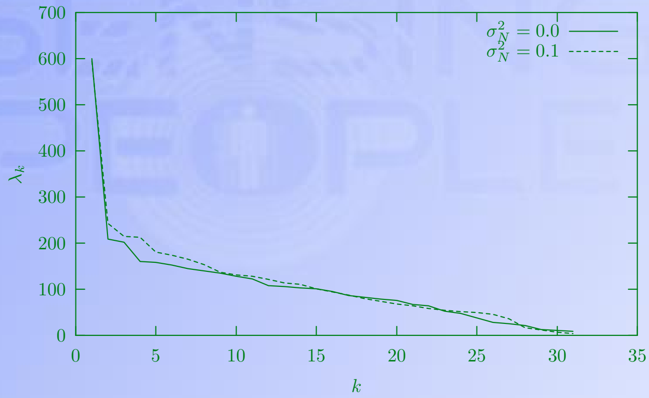
- Signaleigenvektoren besitzen große Eigenwerte $\rightarrow$ Quellenanzahl aus dem Vektor der Eigenwerte bestimmbar.



- Anzahl der „großen“ Eigenwerte $\widehat{=}$ Quellenanzahl.

Bestimmung der Quellenanzahl

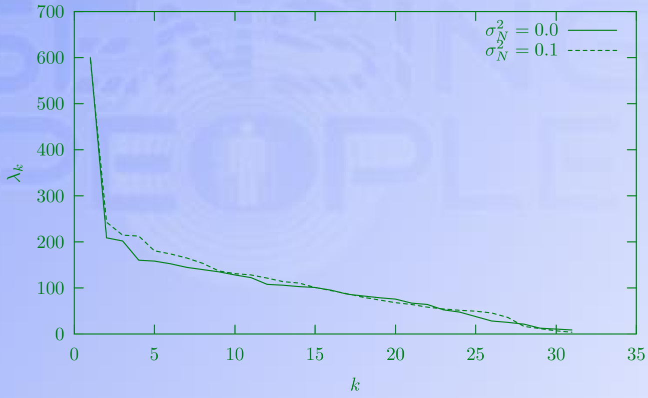
- Signaleigenvektoren besitzen große Eigenwerte → Quellenanzahl aus dem Vektor der Eigenwerte bestimmbar.



- Anzahl der „großen“ Eigenwerte $\widehat{=}$ Quellenanzahl.
  - Schwellwertbasierende Seperation

Bestimmung der Quellenanzahl

- Signaleigenvektoren besitzen große Eigenwerte $\longrightarrow$ Quellenanzahl aus dem Vektor der Eigenwerte bestimmbar.



- Anzahl der „großen“ Eigenwerte $\widehat{=}$ Quellenanzahl.
  - Schwellwertbasierende Seperation
  - Wahrscheinlichkeitsmodellierung

Root-MUSIC

Root-MUSIC

- MUSIC: Quellenpositionen entsprechen den Minima des Nennerterms von $P(\Theta)$.

Root-MUSIC

- MUSIC: Quellenpositionen entsprechen den Minima des Nennerterms von $P(\Theta)$.
- Vergleichbar: Suche nach den Sperrbereichen eines digitalen Filters $\Rightarrow$ Minima von $|H(j\Omega)|$.

(6)

(7)

(8)

Root-MUSIC

- MUSIC: Quellenpositionen entsprechen den Minima des Nennerterms von $P(\Theta)$.
- Vergleichbar: Suche nach den Sperrbereichen eines digitalen Filters $\Rightarrow$ Minima von $|H(j\Omega)|$.

$$H(jk\Delta\Omega) \Rightarrow H(z) \tag{6}$$

(7)

(8)

Root-MUSIC

- MUSIC: Quellenpositionen entsprechen den Minima des Nennerterms von $P(\Theta)$.
- Vergleichbar: Suche nach den Sperrbereichen eines digitalen Filters $\Rightarrow$ Minima von $|H(j\Omega)|$.

$$H(jk\Delta\Omega) \Rightarrow H(z) \tag{6}$$

in P-N-Form (nur Nullstellen)

(7)

(8)

Root-MUSIC

- MUSIC: Quellenpositionen entsprechen den Minima des Nennerterms von $P(\Theta)$.
- Vergleichbar: Suche nach den Sperrbereichen eines digitalen Filters $\Rightarrow$ Minima von $|H(j\Omega)|$.

$$H(jk\Delta\Omega) \Rightarrow H(z) \tag{6}$$

in P-N-Form (nur Nullstellen)

$$|H(z)| = \prod_{q=1}^{Q} |z - z_{0,q}| \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Root-MUSIC

- MUSIC: Quellenpositionen entsprechen den Minima des Nennerterms von $P(\Theta)$.
- Vergleichbar: Suche nach den Sperrbereichen eines digitalen Filters $\Rightarrow$ Minima von $|H(j\Omega)|$.

$$H(jk\Delta\Omega) \Rightarrow H(z) \tag{6}$$

in P-N-Form (nur Nullstellen)

$$|H(z)| = \prod_{q=1}^{Q} |z - z_{0,q}| \tag{7}$$

$$|z - z_{0,q}| \mathrel{\widehat{=}} \text{Abstand Nullstellen} \leftrightarrow z \tag{8}$$

Root-MUSIC II

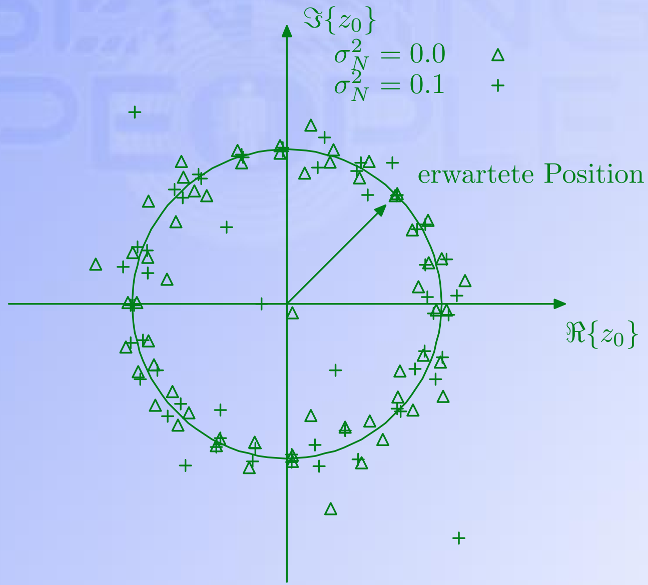
- Minima dort, wo die Nullstellen nahe de „Bahn“ von z (EK!) liegen.

Root-MUSIC II

- Minima dort, wo die Nullstellen nahe de „Bahn“ von z (EK!) liegen.
- Root-MUSIC: Substitution $e^{j1\frac{2\pi}{SL}\Delta l_q}$ durch z in $P(\Theta)$.

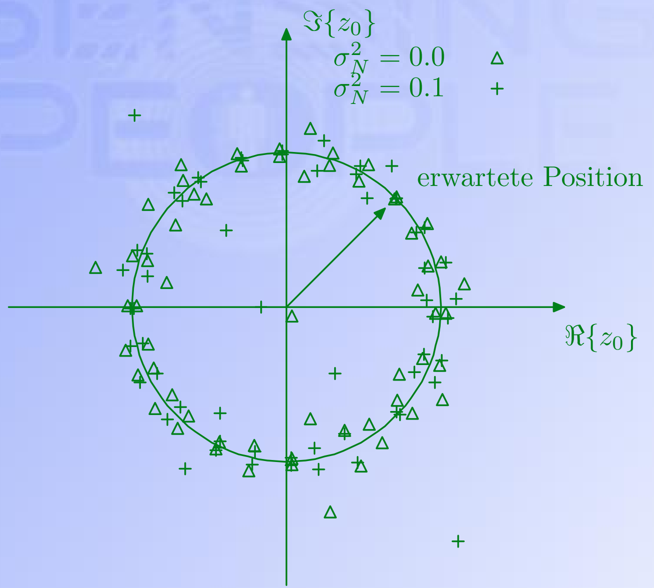
Root-MUSIC II

- Minima dort, wo die Nullstellen nahe de „Bahn“ von z (EK!) liegen.
- Root-MUSIC: Substitution $e^{j1\frac{2\pi}{SL}\Delta l_q}$ durch z in $P(\Theta)$.

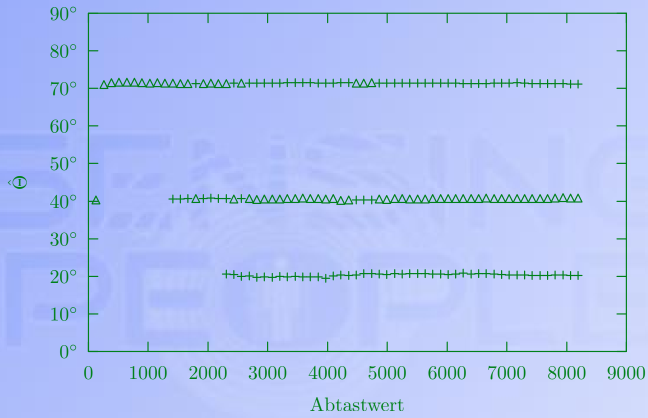


Root-MUSIC II

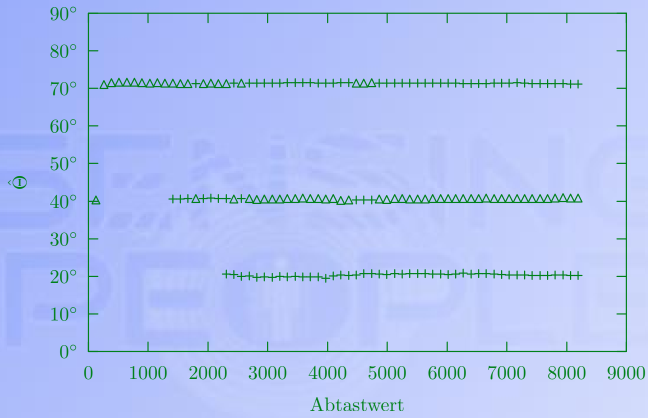
- Minima dort, wo die Nullstellen nahe de „Bahn“ von z (EK!) liegen.
- Root-MUSIC: Substitution $e^{j1\frac{2\pi}{SL}\Delta l_q}$ durch z in $P(\Theta)$.



Ergebnisse für ideale Signale

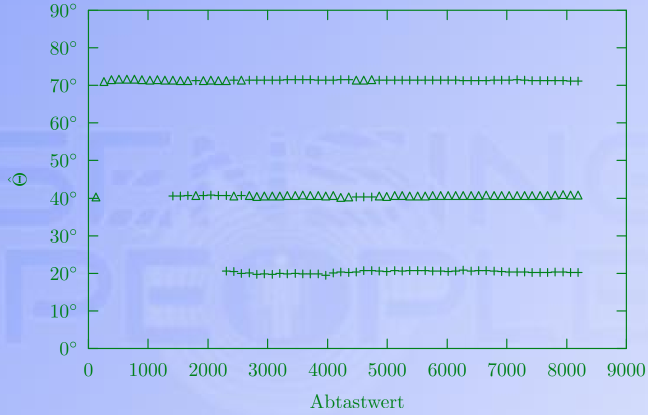


Ergebnisse für ideale Signale



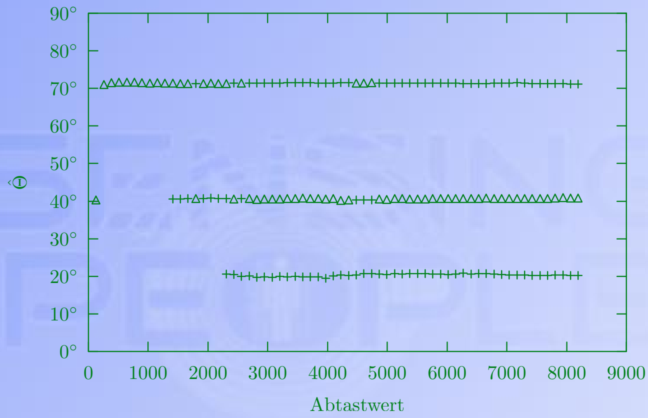
- Ergebnisse bei idealen Bedingungen.

Ergebnisse für ideale Signale



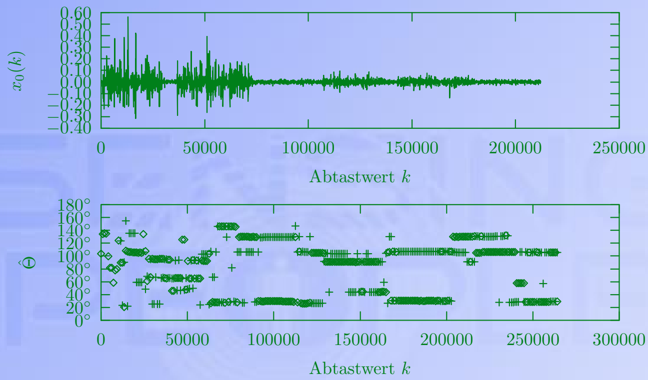
- Ergebnisse bei idealen Bedingungen.
  - 3 simulierte Rauschquellen (dekorrelierte Signale!)

Ergebnisse für ideale Signale

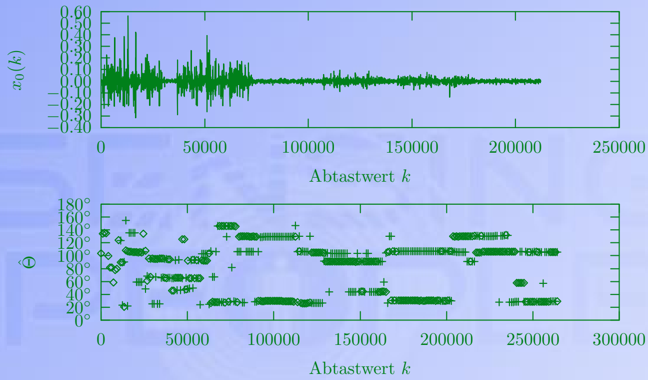


- Ergebnisse bei idealen Bedingungen.
  - 3 simulierte Rauschquellen (dekorrelierte Signale!)
  - Störung durch additives Rauschen, $SNR = 10\,\mathrm{dB}$.

Ergebnisse für reale Signale

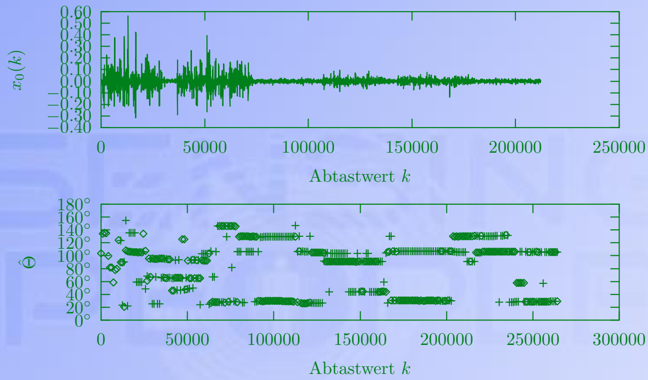


Ergebnisse für reale Signale



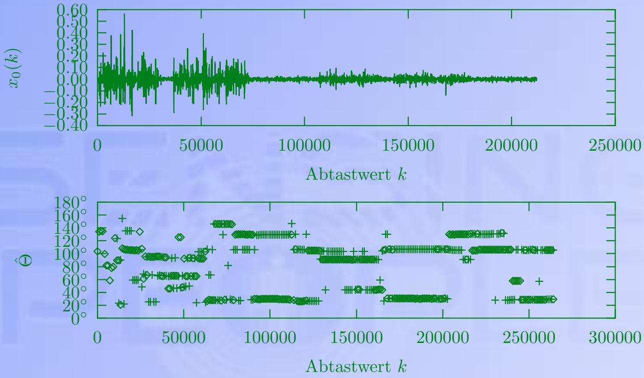
- Ergebnisse für reale Signale.

Ergebnisse für reale Signale



- Ergebnisse für reale Signale.
  - 4 Sprecher, äquidistant auf einem Halbkreis angeordnet.

Ergebnisse für reale Signale



- Ergebnisse für reale Signale.
  - 4 Sprecher, äquidistant auf einem Halbkreis angeordnet.
  - Büroumgebung.

Zusammenfassung

+ Root-MUSIC kann Anzahl und Position von Sprechern erfassen.

Zusammenfassung

+ Root-MUSIC kann Anzahl und Position von Sprechern erfassen.
± Für reale Signale ist eine weitere Auswertung der Peilungen notwendig.

Zusammenfassung

+ Root-MUSIC kann Anzahl und Position von Sprechern erfassen.

± Für reale Signale ist eine weitere Auswertung der Peilungen notwendig.

– Root-MUSIC ist sehr rechenzeitaufwendig.

Zusammenfassung

+ Root-MUSIC kann Anzahl und Position von Sprechern erfassen.

± Für reale Signale ist eine weitere Auswertung der Peilungen notwendig.

– Root-MUSIC ist sehr rechenzeitaufwendig.

  – „Hauptkostenpunkt“ist die Berechnung der Nullstellen eines komplexen Polynoms.

Zusammenfassung

+ Root-MUSIC kann Anzahl und Position von Sprechern erfassen.

± Für reale Signale ist eine weitere Auswertung der Peilungen notwendig.

– Root-MUSIC ist sehr rechenzeitaufwendig.

  – „Hauptkostenpunkt“ist die Berechnung der Nullstellen eines komplexen Polynoms.

  – Dieses Polynom ist besitzt eine Größenordnung von $10^2 \ldots 10^4$.

Zusammenfassung

+ Root-MUSIC kann Anzahl und Position von Sprechern erfassen.

± Für reale Signale ist eine weitere Auswertung der Peilungen notwendig.

– Root-MUSIC ist sehr rechenzeitaufwendig.

  – „Hauptkostenpunkt“ist die Berechnung der Nullstellen eines komplexen Polynoms.
  – Dieses Polynom ist besitzt eine Größenordnung von $10^2 \dots 10^4$.
  – Hauptansatzpunkt für Verbesserung der Laufzeiteffizienz.

Zusammenfassung

+ Root-MUSIC kann Anzahl und Position von Sprechern erfassen.

± Für reale Signale ist eine weitere Auswertung der Peilungen notwendig.

– Root-MUSIC ist sehr rechenzeitaufwendig.

  – „Hauptkostenpunkt“ist die Berechnung der Nullstellen eines komplexen Polynoms.
  – Dieses Polynom ist besitzt eine Größenordnung von $10^2 \dots 10^4$.
  – Hauptansatzpunkt für Verbesserung der Laufzeiteffizienz.

- Problem: Algorithmus erfordert Eigenwertzerlegungen für komplexe Matrizen, die von sehr wenigen Bibliotheken beherrscht werden.