

# Effiziente Repräsentation und Visualisierung diskreter Volumendaten mittels der Wavelet-Transformation

Rüdiger Knörig

[ruediger@knoerig.de](mailto:ruediger@knoerig.de)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN  
Fakultät IV - Elektrotechnik und Informatik  
Institut für Telekommunikationssysteme  
Fachgebiet Nachrichtenübertragung

# Anwendungsbereiche.

- Eindimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Audiosignalverarbeitung.

# Anwendungsbereiche.

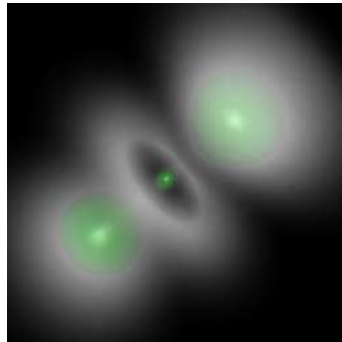
- Eindimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Audiosignalverarbeitung.
- Zweidimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Bildsignalverarbeitung.

# Anwendungsbereiche.

- Eindimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Audiosignalverarbeitung.
- Zweidimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Bildsignalverarbeitung.
- Dreidimensionale Signalverarbeitung.

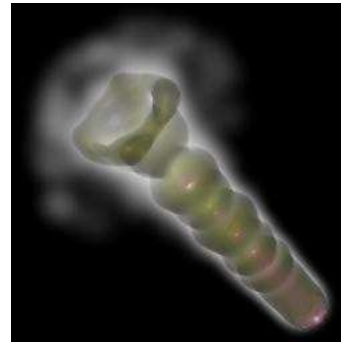
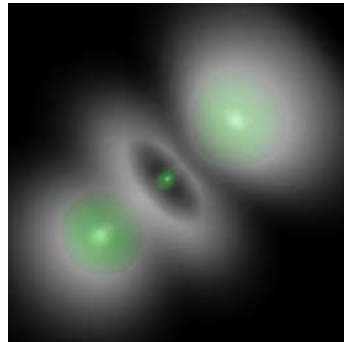
# Anwendungsbereiche.

- Eindimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Audiosignalverarbeitung.
- Zweidimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Bildsignalverarbeitung.
- Dreidimensionale Signalverarbeitung.



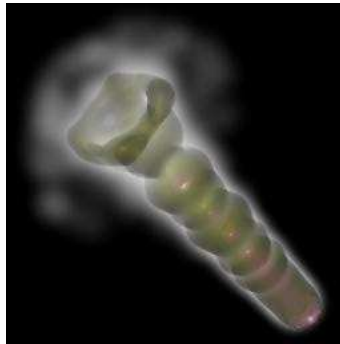
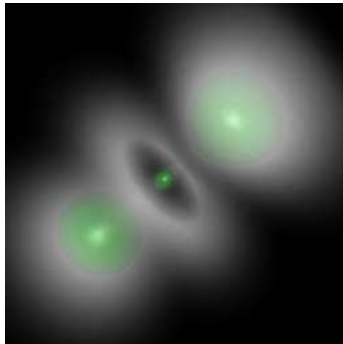
# Anwendungsbereiche.

- Eindimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Audiosignalverarbeitung.
- Zweidimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Bildsignalverarbeitung.
- Dreidimensionale Signalverarbeitung.



# Anwendungsbereiche.

- Eindimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Audiosignalverarbeitung.
- Zweidimensionale Signalverarbeitung  $\Rightarrow$  Bildsignalverarbeitung.
- Dreidimensionale Signalverarbeitung.



# Besonderheiten und Schwierigkeiten

- Speicherplatzbedarf



# Besonderheiten und Schwierigkeiten

- Speicherplatzbedarf
  - Wachstum  $\propto N^3$

# Besonderheiten und Schwierigkeiten

- Speicherplatzbedarf
  - Wachstum  $\propto N^3$
  - $N = 256$ , 8 Bit/Voxel  $\Rightarrow$  16 MByte Speicherplatzbedarf

# Besonderheiten und Schwierigkeiten

- Speicherplatzbedarf
  - Wachstum  $\propto N^3$
  - $N = 256$ , 8 Bit/Voxel  $\Rightarrow$  16 MByte Speicherplatzbedarf
- kein "natürliches" Ausgabemedium.

# Besonderheiten und Schwierigkeiten

- Speicherplatzbedarf
  - Wachstum  $\propto N^3$
  - $N = 256$ , 8 Bit/Voxel  $\Rightarrow$  16 MByte Speicherplatzbedarf
- kein "natürliches" Ausgabemedium.
  - Projektion nötig.

# Besonderheiten und Schwierigkeiten

- Speicherplatzbedarf
  - Wachstum  $\propto N^3$
  - $N = 256$ , 8 Bit/Voxel  $\Rightarrow$  16 MByte Speicherplatzbedarf
- kein "natürliches" Ausgabemedium.
  - Projektion nötig.
    - $\Rightarrow$  Bildschirm als Fenster zur virtuellen Welt.

# Besonderheiten und Schwierigkeiten

- Speicherplatzbedarf
  - Wachstum  $\propto N^3$
  - $N = 256$ , 8 Bit/Voxel  $\Rightarrow$  16 MByte Speicherplatzbedarf
- kein "natürliches" Ausgabemedium.
  - Projektion nötig.
    - $\Rightarrow$  Bildschirm als Fenster zur virtuellen Welt.
    - Sehen - Interpretation aufgefangener elektromagnetischer Strahlung.

# Besonderheiten und Schwierigkeiten

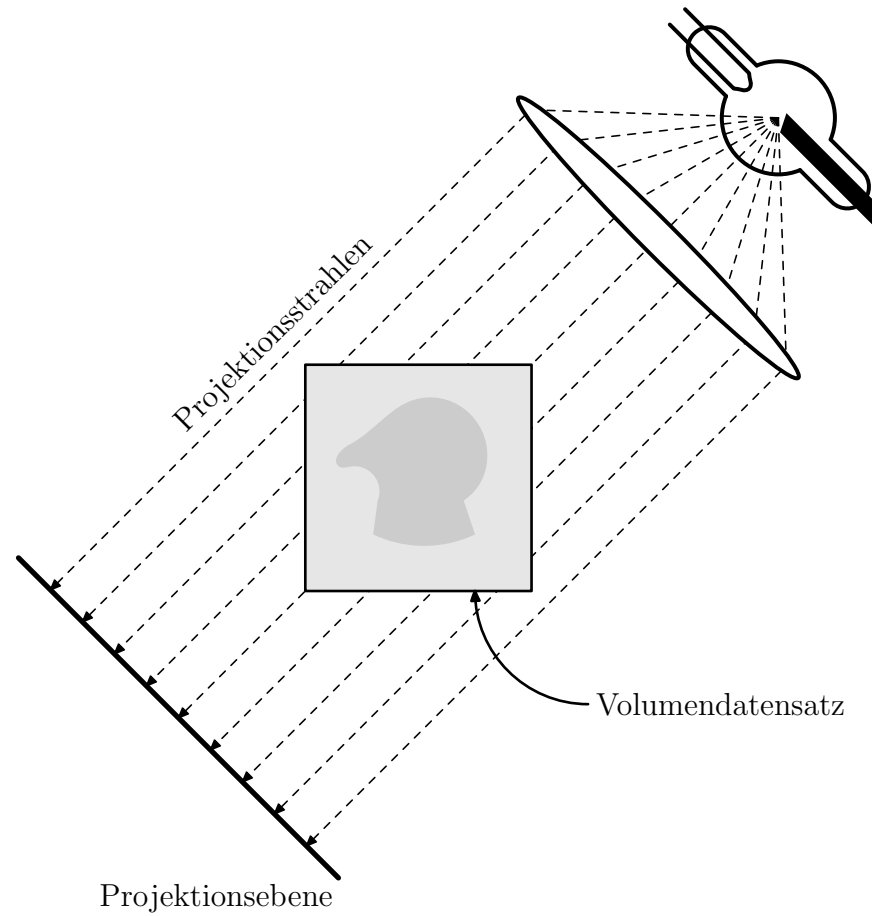
- Speicherplatzbedarf
  - Wachstum  $\propto N^3$
  - $N = 256$ , 8 Bit/Voxel  $\Rightarrow$  16 MByte Speicherplatzbedarf
- kein "natürliches" Ausgabemedium.
  - Projektion nötig.
    - $\Rightarrow$  Bildschirm als Fenster zur virtuellen Welt.
    - Sehen - Interpretation aufgefangener elektromagnetischer Strahlung.
    - Beleuchtungsmodell

# Besonderheiten und Schwierigkeiten

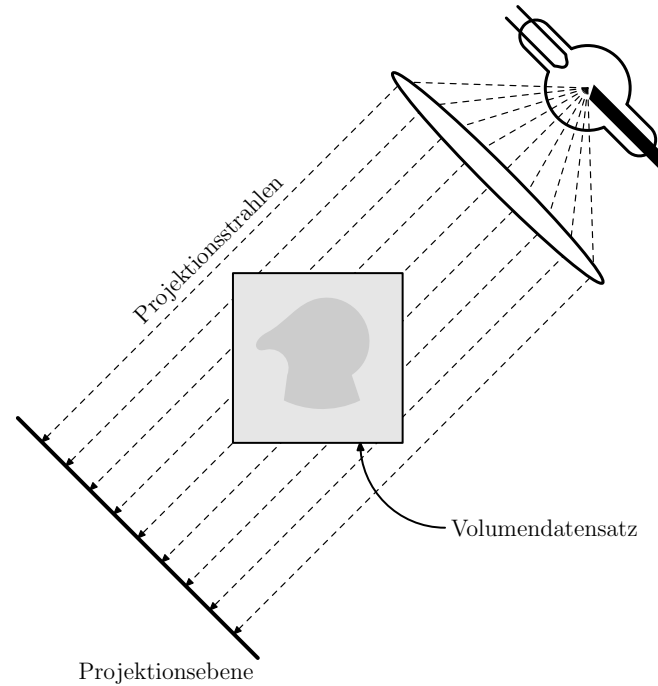
- Speicherplatzbedarf
  - Wachstum  $\propto N^3$
  - $N = 256$ , 8 Bit/Voxel  $\Rightarrow$  16 MByte Speicherplatzbedarf
- kein "natürliches" Ausgabemedium.
  - Projektion nötig.
    - $\Rightarrow$  Bildschirm als Fenster zur virtuellen Welt.
    - Sehen - Interpretation aufgefangener elektromagnetischer Strahlung.
    - Beleuchtungsmodell
      - $\Rightarrow$  Simulation der Wechselwirkung Materie-Strahlung.



# X-Ray-Projektion

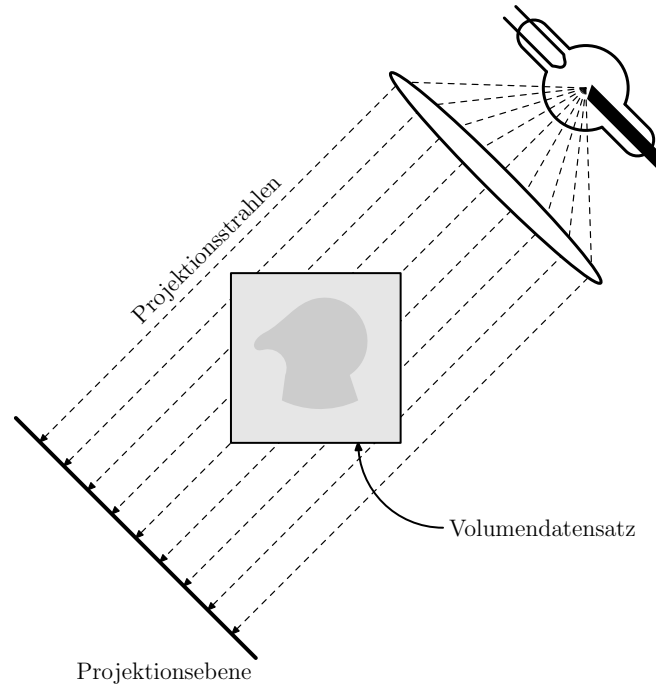


# X-Ray-Projektion



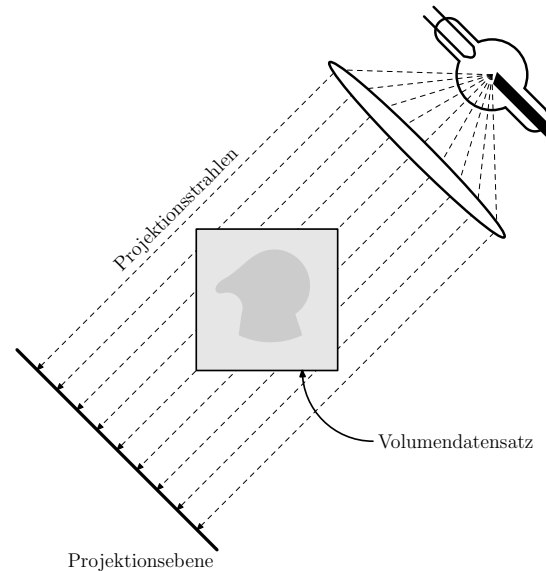
- Sehr hochfrequente elektromagnetische Strahlung

# X-Ray-Projektion



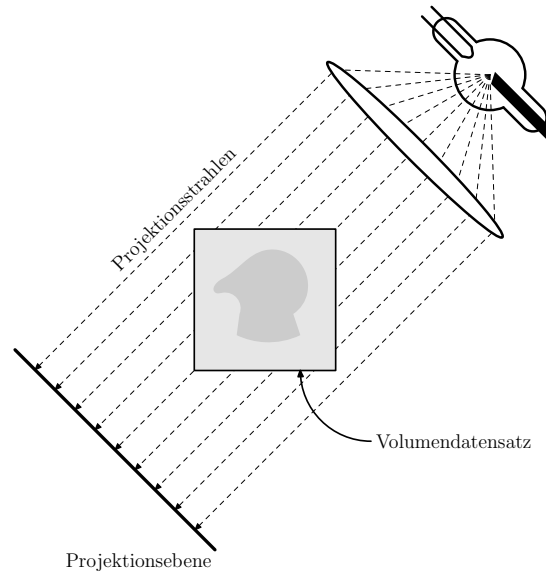
- Sehr hochfrequente elektromagnetische Strahlung  
⇒ Wechselwirkung kann auf Absorption reduziert werden.

# X-Ray-Projektion



- Sehr hochfrequente elektromagnetische Strahlung
  - ⇒ Wechselwirkung kann auf Absorption reduziert werden.
  - ⇒ Annahme: Absorption proportional zum Wegintegral der Dichte.

# X-Ray-Projektion



- Sehr hochfrequente elektromagnetische Strahlung
  - ⇒ Wechselwirkung kann auf Absorption reduziert werden.
  - ⇒ Annahme: Absorption proportional zum Wegintegral der Dichte.
  - ⇒ Lineare Operation.

# Konventionelle Umsetzung

- Raycasting

# Konventionelle Umsetzung

- Raycasting
  - Explizites Aufstellen des Linienintegrals.

# Konventionelle Umsetzung

- Raycasting
  - Explizites Aufstellen des Linienintegrals.
  - ⊖ Schnittpunktberechnung mit Begrenzungsquader.



# Konventionelle Umsetzung

- Raycasting
  - Explizites Aufstellen des Linienintegrals.
  - ⊖ Schnittpunktberechnung mit Begrenzungsquader.
  - ⊖ Trilineare Interpolation an Stützpunkten des Wegintegrals.

# Konventionelle Umsetzung

- Splatting

# Konventionelle Umsetzung

- Splatting
  - Voxel als Abtastpunkte.

# Konventionelle Umsetzung

- Splatting
  - Voxel als Abtastpunkte.
  - Interpolation durch Faltung mit Basisfunktion (z.B. Splines).

# Konventionelle Umsetzung

- Splatting
  - Voxel als Abtastpunkte.
  - Interpolation durch Faltung mit Basisfunktion (z.B. Splines).
  - Integration durch Akkumulierung der projizierten Basisfunktionen.

# Konventionelle Umsetzung

- Splatting
  - Voxel als Abtastpunkte.
  - Interpolation durch Faltung mit Basisfunktion (z.B. Splines).
  - Integration durch Akkumulierung der projizierten Basisfunktionen.
- Hohe Anforderung an die Verarbeitungsbandbreite (Beispiel)

# Progressive Projektion

- Zur Auswahl des Blickwinkels reicht eine Approximation.

# Progressive Projektion

- Zur Auswahl des Blickwinkels reicht eine Approximation.
- Nach Auswahl des Blickwinkels
  - Schrittweise Rekonstruktion auf vollwertige Darstellung.



# Progressive Projektion

- Zur Auswahl des Blickwinkels reicht eine Approximation.
  - Nach Auswahl des Blickwinkels
    - Schrittweise Rekonstruktion auf vollwertige Darstellung.
- ⇒ Kommt menschlicher Perzeption entgegen.  
(Beispiel)

# Progressive Projektion

- Prinzip: Zerlegung des Datensatzes  $X_{3D} \in V_0$

$V_0$  =




# Progressive Projektion

- Prinzip: Zerlegung des Datensatzes  $X_{3D} \in V_0$

$$V_0 = V_1 +$$


# Progressive Projektion

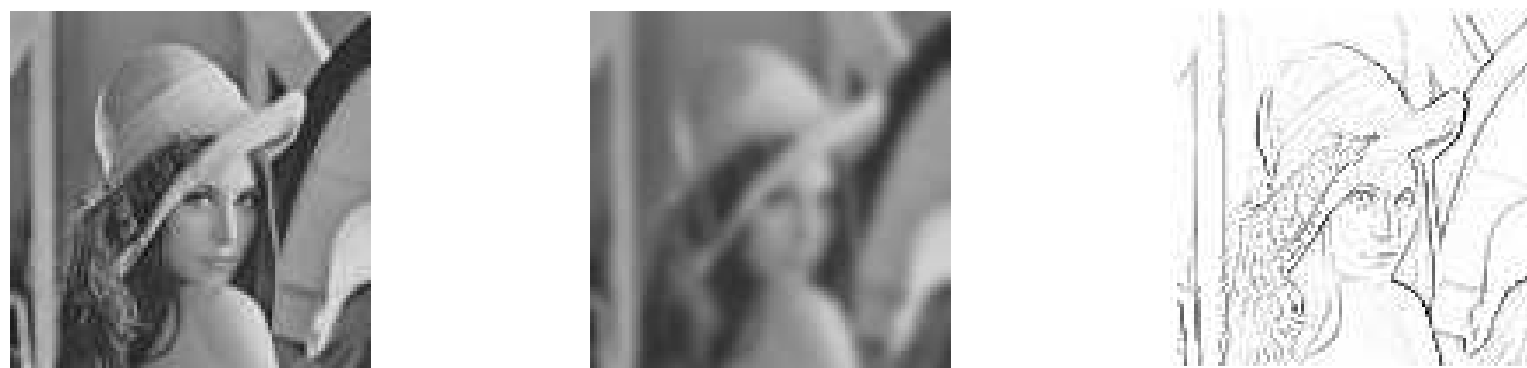
- Prinzip: Zerlegung des Datensatzes  $X_{3D} \in V_0$

$$V_0 = V_1 +$$


Approximation

# Progressive Projektion

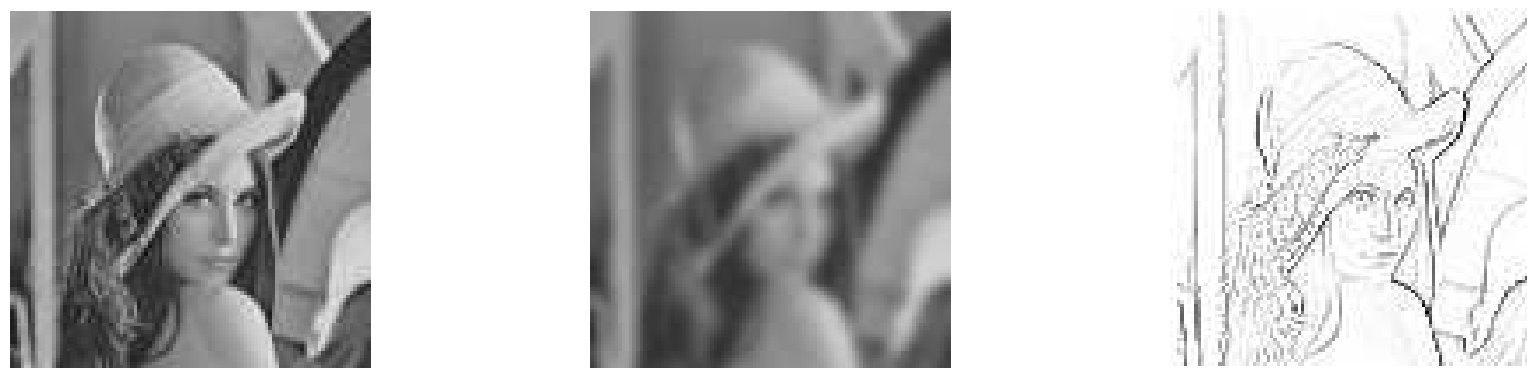
- Prinzip: Zerlegung des Datensatzes  $X_{3D} \in V_0$

$$V_0 = V_1 + W_1$$


The diagram shows the decomposition of a grayscale image  $V_0$  into an approximation  $V_1$  and a detail component  $W_1$ .  $V_0$  is a grayscale image of a woman wearing a hat.  $V_1$  is a blurred version of  $V_0$ , representing the approximation.  $W_1$  is a grayscale image showing the edges and details of  $V_0$ , representing the detail component. The word "Approximation" is written below  $V_1$ .

# Progressive Projektion

- Prinzip: Zerlegung des Datensatzes  $X_{3D} \in V_0$

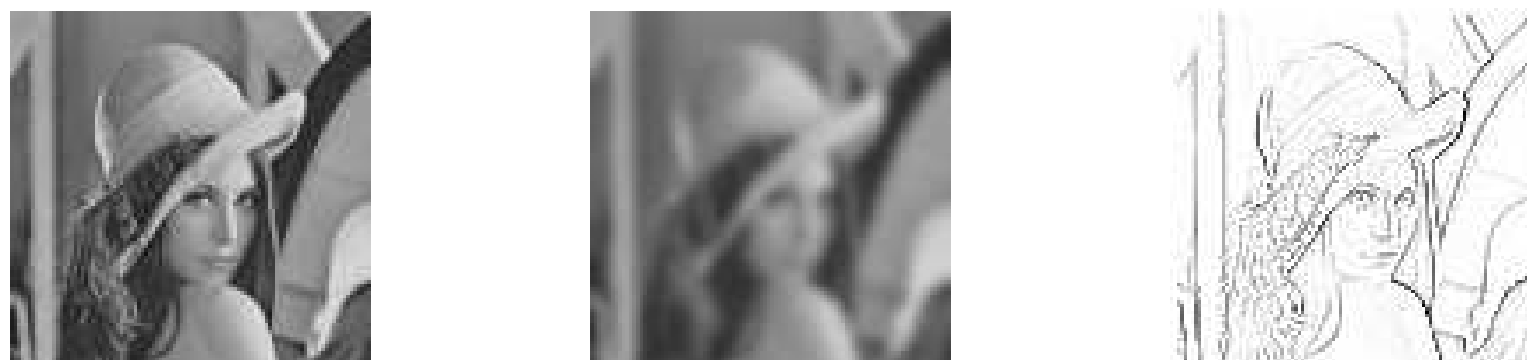
$$V_0 = V_1 + W_1$$


Approximation

Detail

# Progressive Projektion

- Prinzip: Zerlegung des Datensatzes  $X_{3D} \in V_0$

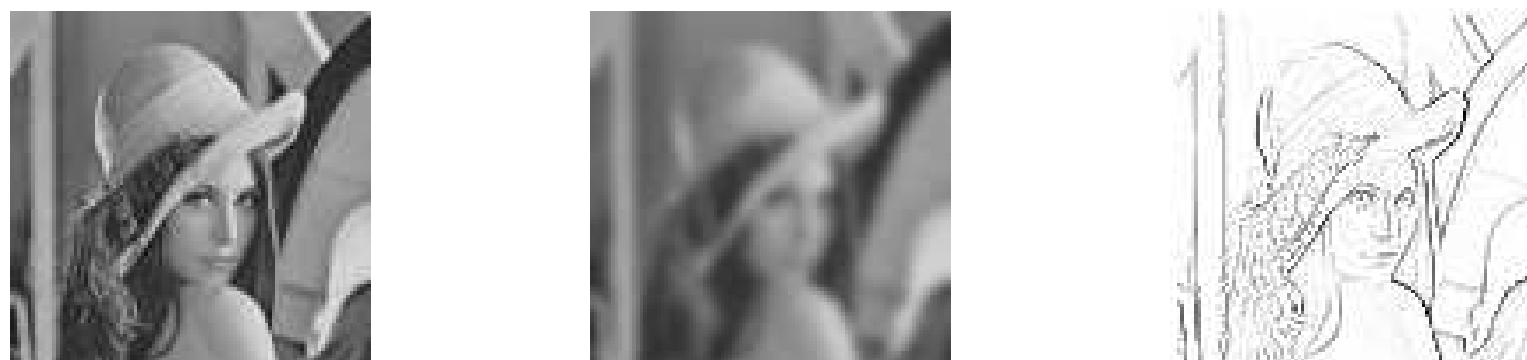
$$V_0 = V_1 + W_1$$


The diagram shows the decomposition of a grayscale image into two components. On the left is the original image, labeled  $V_0$ . In the middle is a blurred version of the image, labeled  $V_1$  and "Approximation". On the right is a high-frequency detail image, labeled  $W_1$  and "Detail". The equation  $V_0 = V_1 + W_1$  is shown above the images.

- durch Anwendung der Basisfunktionen

# Progressive Projektion

- Prinzip: Zerlegung des Datensatzes  $X_{3D} \in V_0$

$$V_0 = V_1 + W_1$$


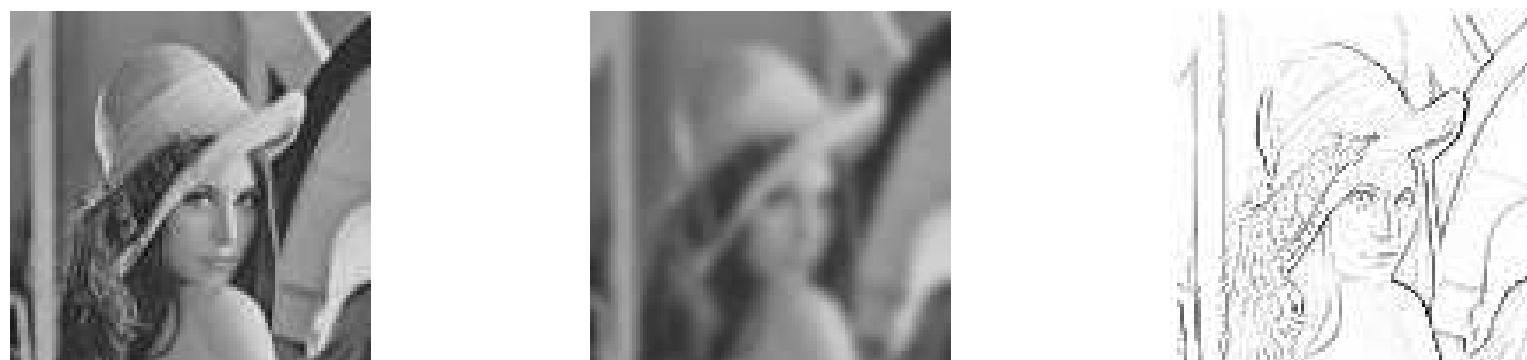
The diagram shows the decomposition of a grayscale image. On the left is the original image, labeled  $V_0$ . In the middle is a blurred version of the image, labeled  $V_1$  and "Approximation". On the right is a high-frequency detail image, labeled  $W_1$  and "Detail". The equation  $V_0 = V_1 + W_1$  is shown above the images.

- durch Anwendung der Basisfunktionen
  - Skalierungsfunktion  $\varphi_1$  (Basis von  $V_1$ )



# Progressive Projektion

- Prinzip: Zerlegung des Datensatzes  $X_{3D} \in V_0$

$$V_0 = V_1 + W_1$$


Approximation

Detail

- durch Anwendung der Basisfunktionen
  - Skalierungsfunktion  $\varphi_1$  (Basis von  $V_1$ )
  - Waveletfunktion  $\psi_1$  (Basis von  $W_1$ )

# Wavelet-Zerlegung

- Rekursive Anwendung der Zerlegung auf die Approximation:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1$$

# Wavelet-Zerlegung

- Rekursive Anwendung der Zerlegung auf die Approximation:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1 \\ &= (\mathbf{V}_2 + \mathbf{W}_2) + \mathbf{W}_1 \end{aligned}$$

# Wavelet-Zerlegung

- Rekursive Anwendung der Zerlegung auf die Approximation:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1 \\ &= (\mathbf{V}_3 + \mathbf{W}_3) + \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_1 \end{aligned}$$

# Wavelet-Zerlegung

- Rekursive Anwendung der Zerlegung auf die Approximation:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1 \\ &= \mathbf{V}_M + \mathbf{W}_M + \mathbf{W}_{M-1} + \dots + \mathbf{W}_1 \end{aligned}$$

# Wavelet-Zerlegung

- Rekursive Anwendung der Zerlegung auf die Approximation:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1 \\ &= \mathbf{V}_M + \mathbf{W}_M + \mathbf{W}_{M-1} + \dots + \mathbf{W}_1 \end{aligned}$$

⇒ Ideal für eine progressive Projektion.

# Wavelet-Zerlegung

- Rekursive Anwendung der Zerlegung auf die Approximation:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1 \\ &= \mathbf{V}_M + \mathbf{W}_M + \mathbf{W}_{M-1} + \dots + \mathbf{W}_1 \end{aligned}$$

- Zerlegung durch Korrelation mit dilatierten Versionen der Basisfunktionen.

# Wavelet-Zerlegung

- Rekursive Anwendung der Zerlegung auf die Approximation:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1 \\ &= \mathbf{V}_M + \mathbf{W}_M + \mathbf{W}_{M-1} + \dots + \mathbf{W}_1 \end{aligned}$$

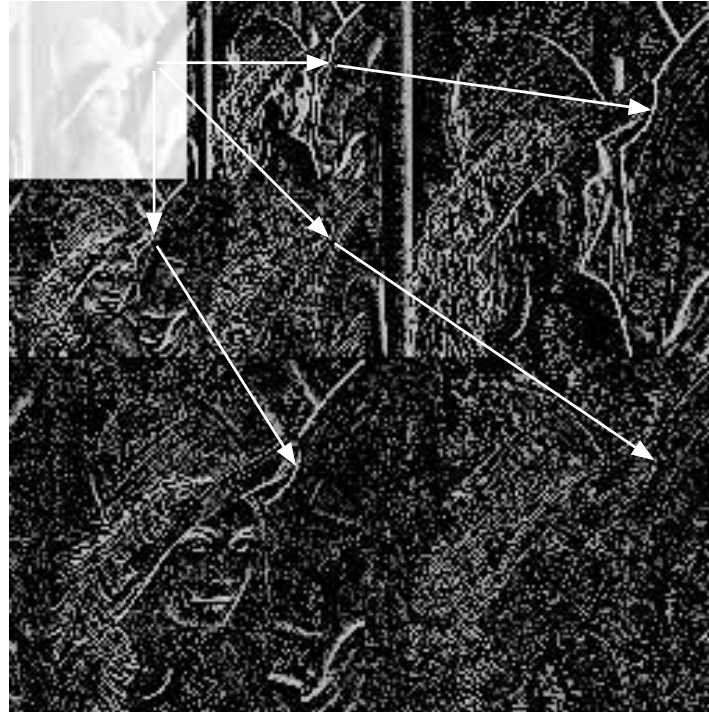
- Zerlegung durch Korrelation mit dilatierten Versionen der Basisfunktionen.
- Rekonstruktion durch Faltung mit dilatierten Versionen der Basisfunktionen:

$$x[k] = \underbrace{\langle c_M[n], \varphi_{M,n} \rangle}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\sum_{m=M}^1 \langle d_m[n], \psi_{m,n} \rangle}_{\text{Detailstufen}}$$



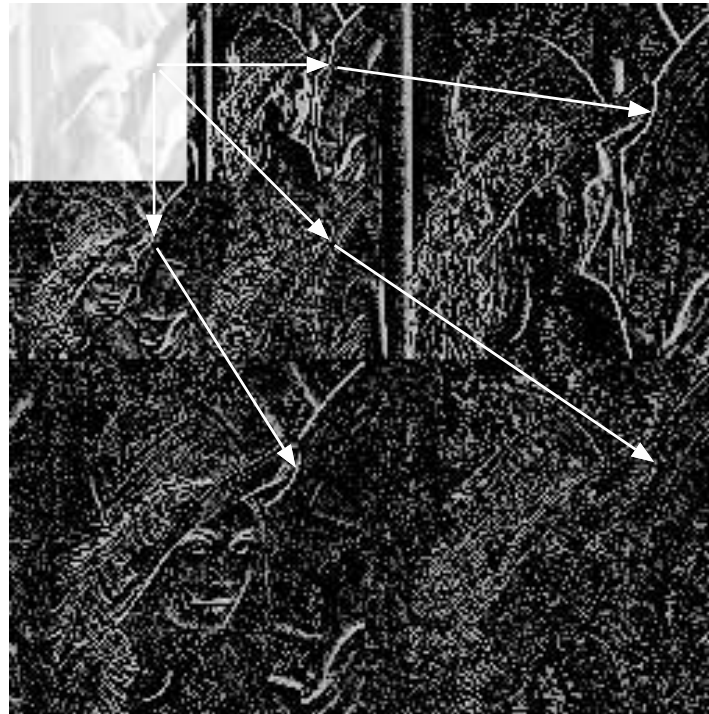
# Wavelet-Zerlegung

- Beispiel: separierbare 2D-Waveletzerlegung eines Bildes:



# Wavelet-Zerlegung

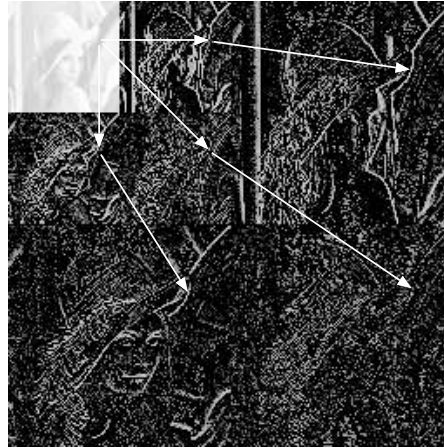
- Beispiel: separierbare 2D-Waveletzerlegung eines Bildes:



- 2D-Transformation:  $2^2 = 4$  Basisfunktionen.

# Wavelet-Zerlegung

- Beispiel: separierbare 2D-Waveletzerlegung eines Bildes:



- 2D-Transformation:  $2^2 = 4$  Basisfunktionen.
- Anzahl relevante Koeffizienten nimmt bei natürlichen Signalen mit zunehmender Zerlegungstiefe ab.

# Kombination mit Projektion

- Formale Beschreibung der Projektion

$$X'_{2D} := P \{X_{3D}\}$$

# Kombination mit Projektion

- Einsetzen der Wavelet-Rekonstruktionsgleichung

$$X'_{2D} := P \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbf{V}_M} \vec{\varphi}_{M, \vec{n}} \cdot c_M [\vec{n}] + \sum_{m=M}^1 \sum_{\vec{n} \in \mathbf{W}_m} \vec{\psi}_{M, \vec{n}} \cdot d_m [\vec{n}] \right\}$$

# Kombination mit Projektion

- Einsetzen der Wavelet-Rekonstruktionsgleichung

$$X'_{2D} := P \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbf{V}_M} \vec{\varphi}_{M, \vec{n}} \cdot c_M [\vec{n}] + \sum_{m=M}^1 \sum_{\vec{n} \in \mathbf{W}_m} \vec{\psi}_{M, \vec{n}} \cdot d_m [\vec{n}] \right\}$$

- Annahme: Lineare Projektion  $P\{\dots\}$

# Kombination mit Projektion

- Einsetzen der Wavelet-Rekonstruktionsgleichung

$$X'_{2D} := P \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbf{V}_M} \vec{\varphi}_{M, \vec{n}} \cdot c_M [\vec{n}] + \sum_{m=M}^1 \sum_{\vec{n} \in \mathbf{W}_m} \vec{\psi}_{M, \vec{n}} \cdot d_m [\vec{n}] \right\}$$

- Annahme: Lineare Projektion  $P\{\dots\}$   
 $\Rightarrow$  Ausführungsreihenfolge kann mit den Summationen vertauscht werden.

# Kombination mit Projektion

- Einsetzen der Wavelet-Rekonstruktionsgleichung

$$X'_{2D} := P \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbf{V}_M} \vec{\varphi}_{M, \vec{n}} \cdot c_M [\vec{n}] + \sum_{m=M}^1 \sum_{\vec{n} \in \mathbf{W}_m} \vec{\psi}_{M, \vec{n}} \cdot d_m [\vec{n}] \right\}$$

- Annahme: Lineare Projektion  $P\{\dots\}$

⇒ Ausführungsreihenfolge kann mit den Summationen vertauscht werden.

$$X'_{2D} := \sum_{\vec{n} \in \mathbf{V}_M} P \left\{ \vec{\varphi}_{M, \vec{n}} \right\} \cdot c_M [\vec{n}] + \sum_{m=M}^1 \sum_{\vec{n} \in \mathbf{W}_m} P \left\{ \vec{\psi}_{M, \vec{n}} \right\} \cdot d_m [\vec{n}]$$



# Kombination mit Projektion

- Annahme: Lineare Projektion  $P\{\dots\}$   
⇒ Ausführungsreihenfolge kann mit den Summationen vertauscht werden.

$$X'_{2D} := \sum_{\vec{n} \in \mathbf{V}_M} P \left\{ \vec{\varphi}_{M, \vec{n}} \right\} \cdot c_M [\vec{n}] + \sum_{m=M}^1 \sum_{\vec{n} \in \mathbf{W}_m} P \left\{ \vec{\psi}_{M, \vec{n}} \right\} \cdot d_m [\vec{n}]$$

- Bild als Überlagerung von Projektionen entsprechend gewichteter, dilatierter und verschobener Basisfunktionen.

# Kontrastverbesserung

- Umsetzung nutzt Fourier-Slicing-Technik:

# Kontrastverbesserung

- Umsetzung nutzt Fourier-Slicing-Technik:
  - Einfache analytische Ausdrücke für Fouriertransformierte der Basisfunktionen.

# Kontrastverbesserung

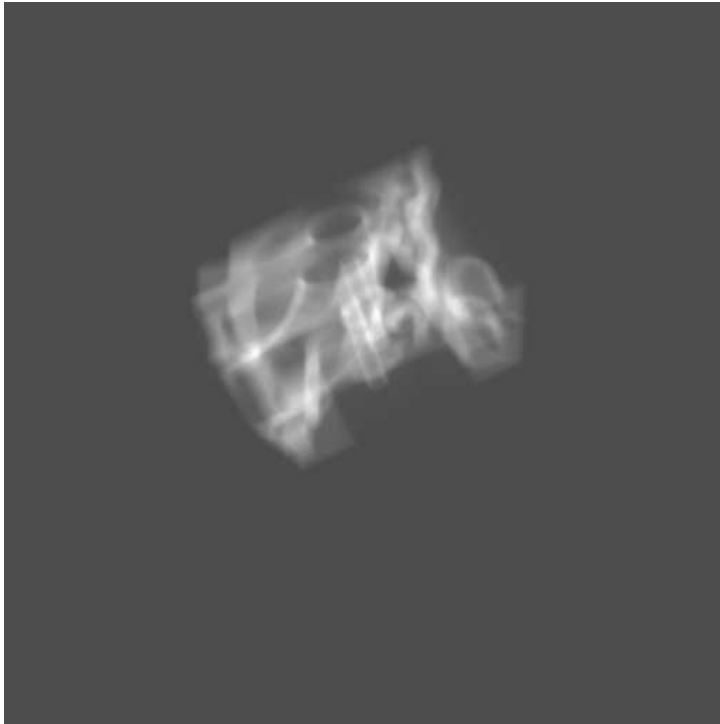
- Umsetzung nutzt Fourier-Slicing-Technik:
  - Einfache analytische Ausdrücke für Fouriertransformierte der Basisfunktionen.
  - Schnelle Berechnung des Linienintegrals möglich.

# Kontrastverbesserung

- Umsetzung nutzt Fourier-Slicing-Technik:
  - Einfache analytische Ausdrücke für Fouriertransformierte der Basisfunktionen.
  - Schnelle Berechnung des Linienintegrals möglich.
  - Ausnutzung von  $\mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt} u(t) \right\} = j\omega \cdot U(j\omega)$ .

# Kontrastverbesserung

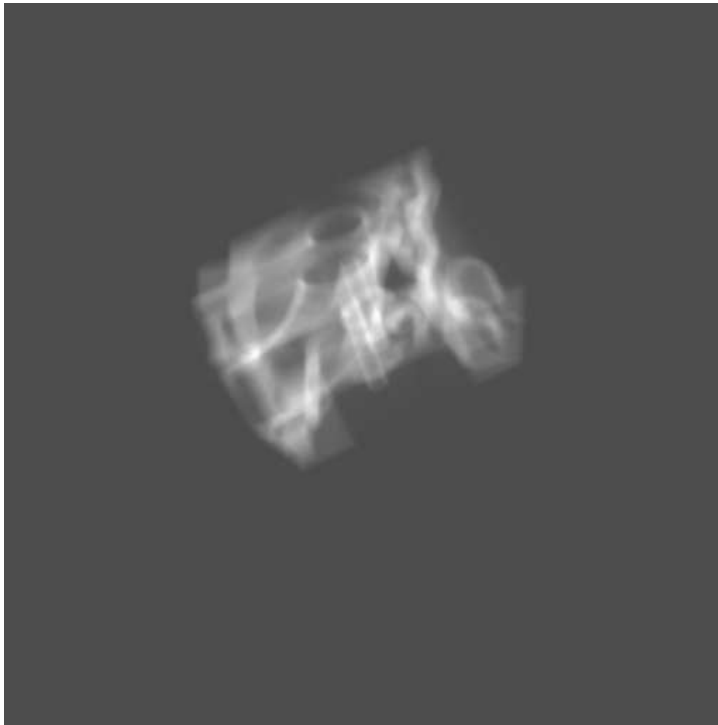
⇒ Überlagerung der normalen Rekonstruktion



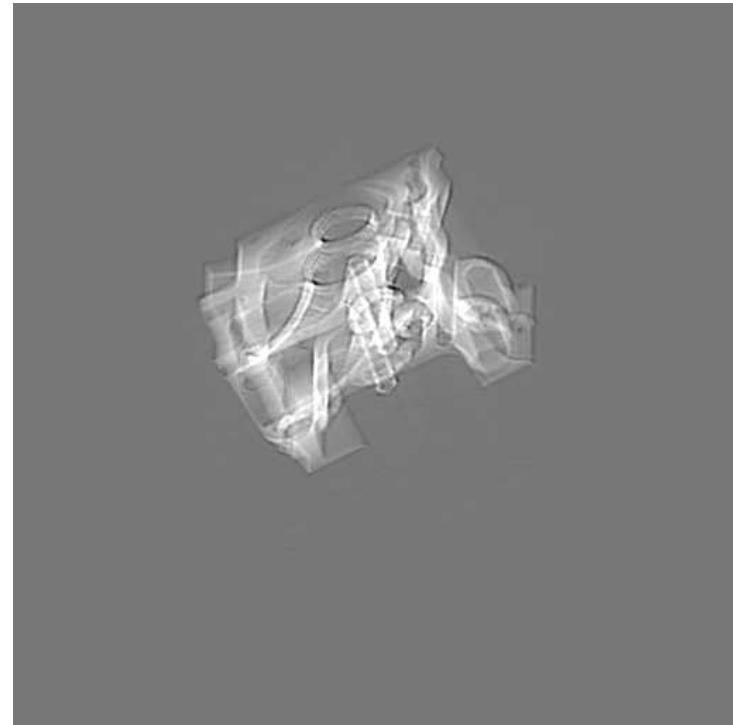
Normal

# Kontrastverbesserung

⇒ Überlagerung der normalen Rekonstruktion mit Rekonstruktion durch Gradienten der Basisfunktionen



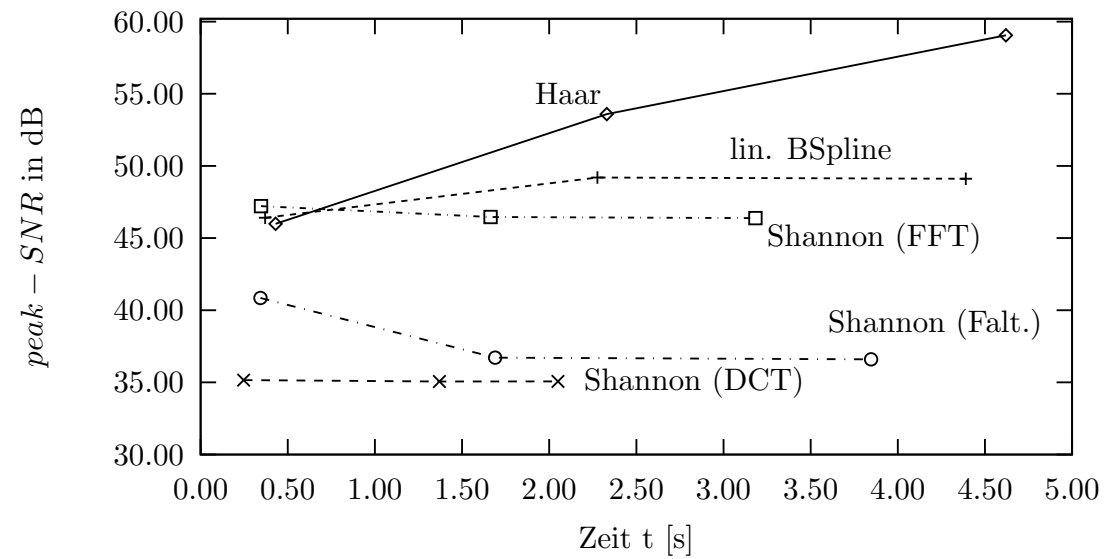
Normal



Verbessert

# Ergebnisse

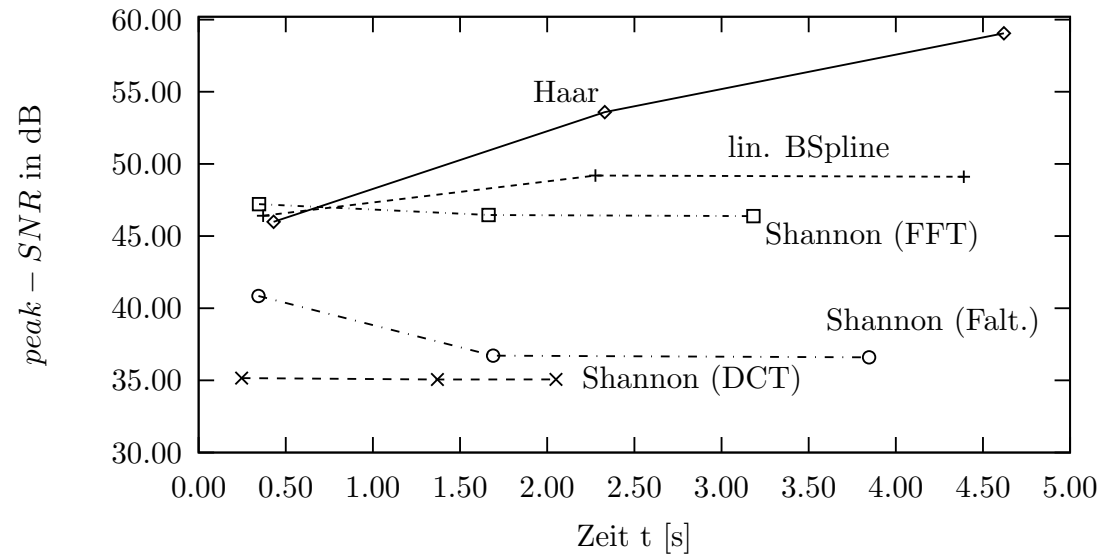
## ● Wavelet-Eignung





# Ergebnisse

## ● Wavelet-Eignung



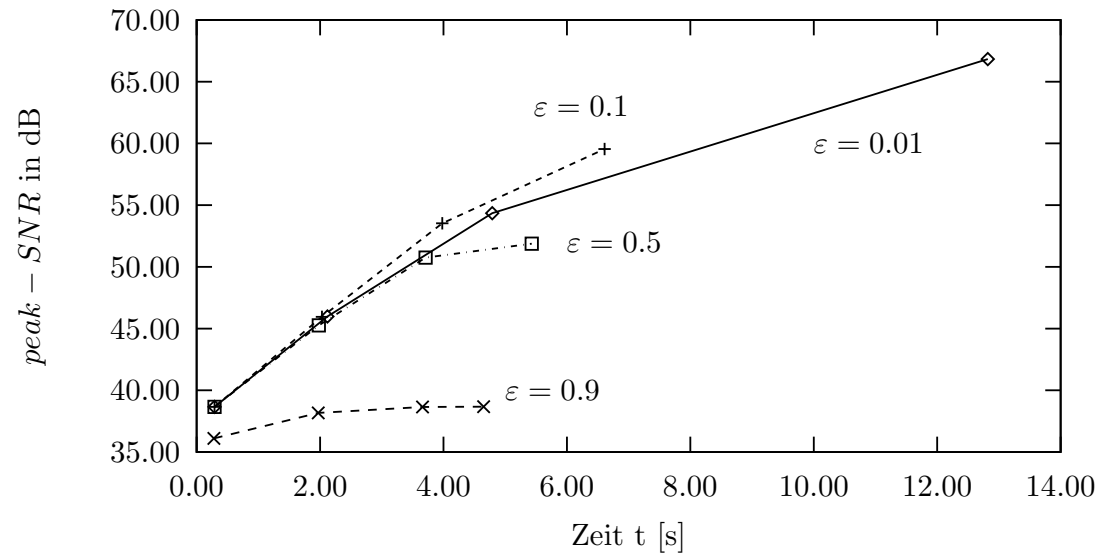
● Referenz-Renderer: 4.6 bzw. 2.5 Sekunden.

# Ergebnisse

- Irrelevanzreduktion durch Schwellwertsegmentierung der Koeffizienten.

# Ergebnisse

- Irrelevanzreduktion durch Schwellwertsegmentierung der Koeffizienten.

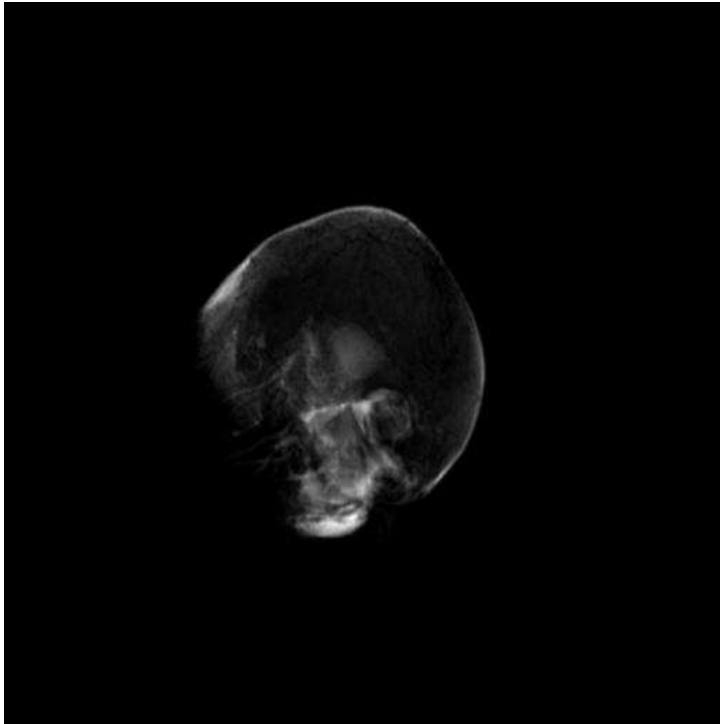


# Ergebnisse

- Normierter Datensatz, Schwellwert 0.9

# Ergebnisse

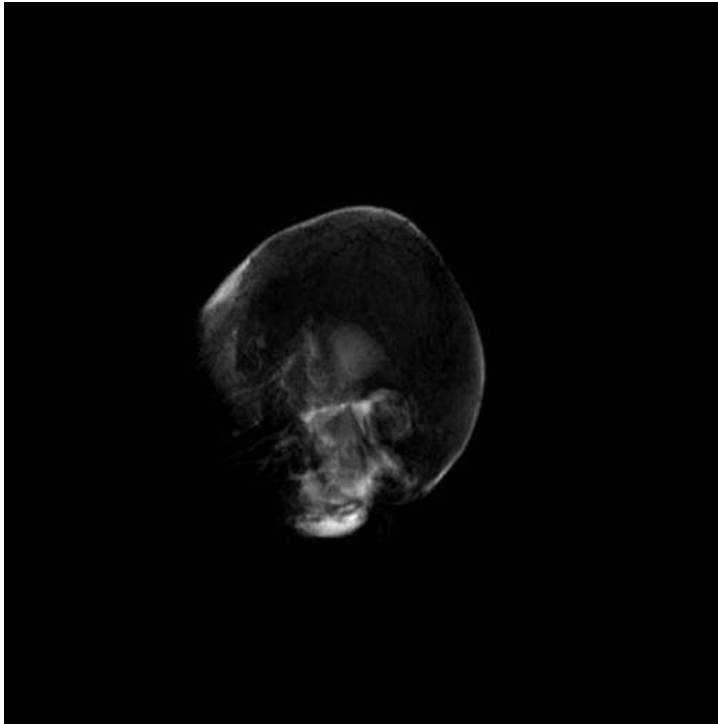
- Normierter Datensatz, Schwellwert 0.9



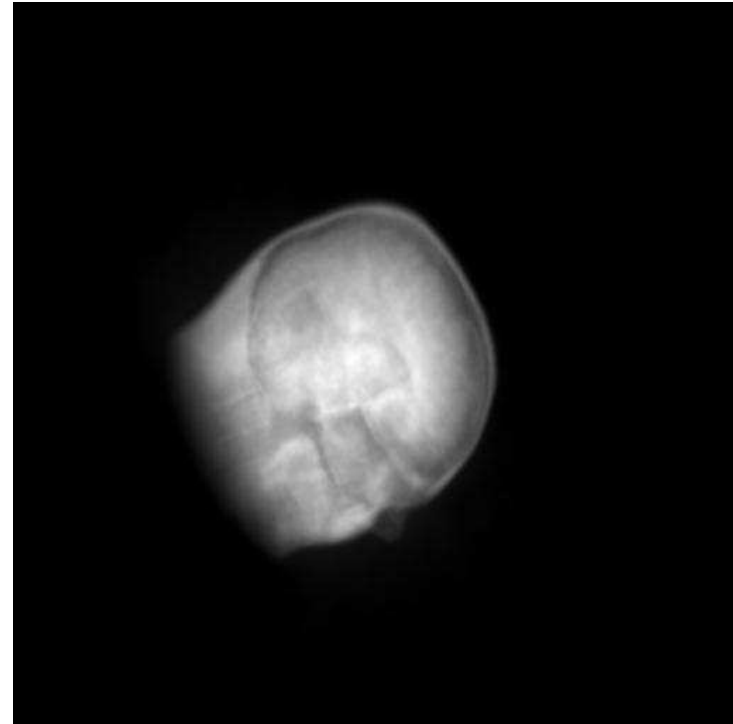
Referenzrenderer

# Ergebnisse

- Normierter Datensatz, Schwellwert 0.9



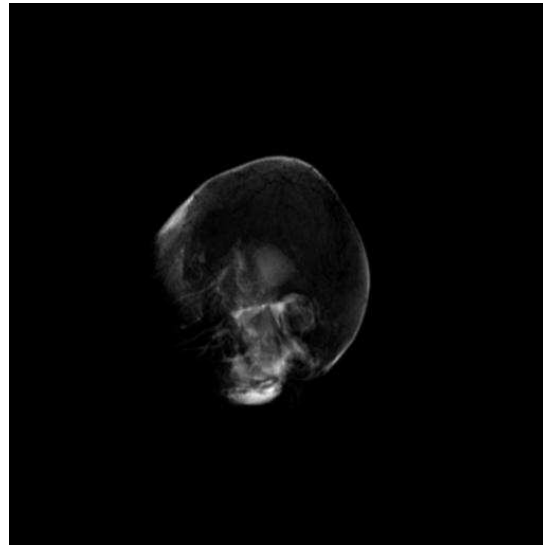
Referenzrenderer



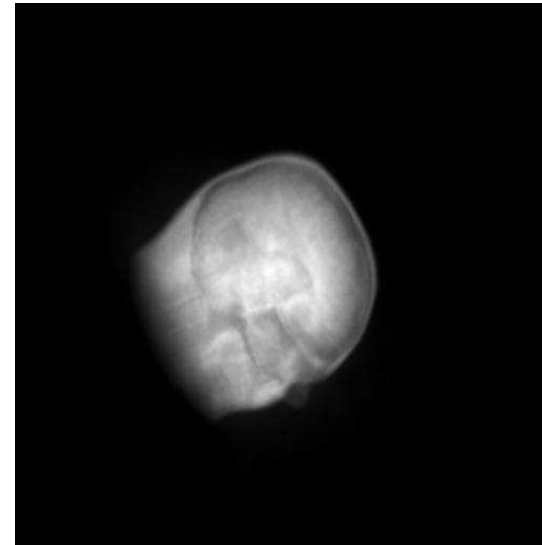
Waveletbasierender  
Renderer

# Ergebnisse

- Normierter Datensatz, Schwellwert 0.9



Referenzrenderer

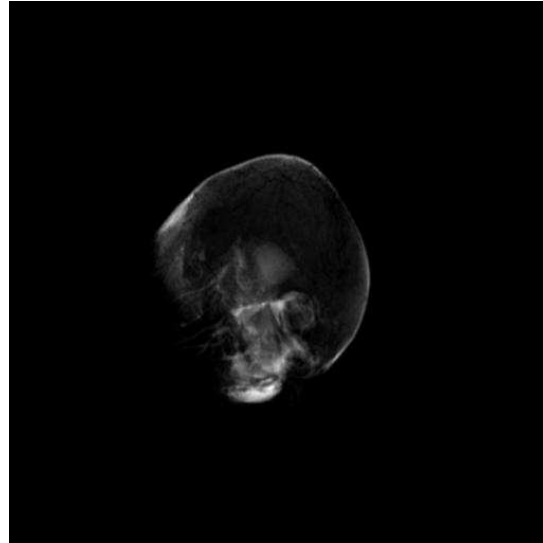


Waveletbasierender  
Renderer

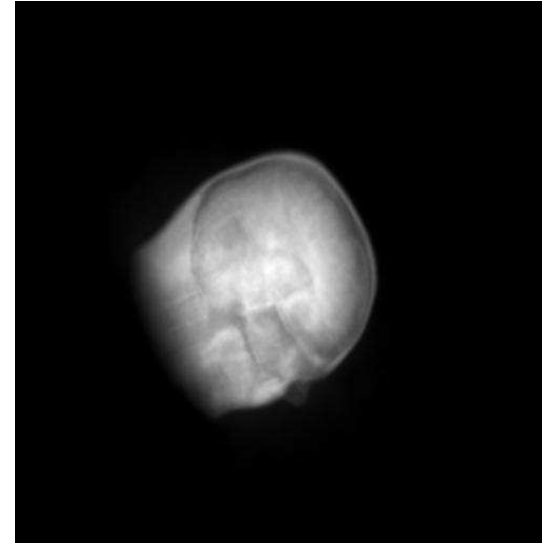
- Nur 0.263 % aller Waveletkoeffizienten wurden genutzt!

# Ergebnisse

- Normierter Datensatz, Schwellwert 0.9



Referenzrenderer



Waveletbasierender  
Renderer

- Nur 0.263 % aller Waveletkoeffizienten wurden genutzt!
- Bei einem 16 MByte-Volumendatensatz entspricht dies  $\approx$  43 kByte!